Hedging av rentederivat

Lars Aga Reisæter

Masteroppgåve i statistikk
Finansteori og forsikringsmatematikk

Matematisk institutt
Universitetet i Bergen

16. november 2006

Denne oppgåva er skriven i $\LaTeX\,2_\varepsilon$, med klassen `uib-mi-master`. Brødteksten er sett i 11 punkts URW Palladio. Matematikken er sett i URW Palladio og Pazo Math, overskrifter i HV-Math og programkode i Bitstream Courier.

Alle figurer og simuleringar er gjort med R Development Core Team (2006)

Takk

Eg vil takka rettleiaren min, Jostein Paulsen, for at han klarte tyda seg gjennom den, desverre, haltande nynorsken i dei første utkasta. Han fortener og takk for konstruktive tilbakemeldingar og tips.

I tillegg vil eg takke alle eg har studert i lag med på Kroepeliens, og som har gjort sitt til at eg truleg kjem til å sakna denne perioden, når eg no er ferdig. Spesielt vil eg takka Karl Ove, for at han, ved ein fantastisk innsats gjennom heile semesteret, har klart å halda middeltemperaturen på lesesalen svært nær 40 grader. Han fortener og ein stor del av æra for at denne oppgåva ikkje har vorte skriven med penn og linjal.

Sambuaren min, Trude, fortener ein stor takk for alt frå retting av skrive- og teiknsetjingsfeil i oppgåva, til generell tålmodigheit med «nerdete» statistikkprat.

Avslutningsvis vil eg senda ein takk til den personen som avgjorde at dataanlegget på matematisk institutt skulle oppdaterast midt under den mest hektiske innspurten på både mi, og mange andre sine masteroppgåver.

Bergen, 16. november 2006
Lars Aga Reisæter

Innhald

I Introduksjon og generell finansteori 2

1 Innleiing 3

2 Grunnleggjande element 5
- 2.1 Wienerprosessen 5
- 2.2 Arbitrage 6
- 2.3 Sjølvfinansierande 6
- 2.4 Stokastisk integrasjon 7
  - 2.4.1 Itô-integral 7
  - 2.4.2 Itô's formel 8
  - 2.4.3 Itô's formel i fleire dimensjonar 9
- 2.5 Feynman-Kác 10
- 2.6 Risikonøytralt mål 10
  - 2.6.1 Girsanovs teorem 11
  - 2.6.2 T-obligasjonar 12
- 2.7 Renter 13
  - 2.7.1 Korte rentemodellar 14
  - 2.7.2 Forward renta 15
  - 2.7.3 Forhold mellom modellar 17
  - 2.7.4 Bankkonto 18
- 2.8 Finansielle kontraktar 18
- 2.9 «Change of numeraire» 19

II Hedging og prising av sikre derivat. 21

3 Hedging ved bruk av obligasjonar i ein korttidsrentemodell 22
- 3.1 Ho-Lee 24
- 3.2 Hull-White 25

4 Hedging med obligasjon og bankkonto 26

5 Hedgingstrategi ved bruk av «change of numeraire» 31
5.1 Exchange opsjon 32
5.1.1 Ho-Lee 33
5.1.2 Hull-White 34
5.1.3 Simulering 35
5.2 Kjøpsopsjon 39
5.3 Salgsopsjon 40

6 Swap og caps 42
6.1 Hedging av ei swapkontrakt 42
6.2 Caplet og cap i marknadsmodellen 43
6.2.1 Caplet 43
6.2.2 Cap 45

7 Delta hedging og paritetar 46
7.1 Paritetar 46
7.2 «Grekarane» 48
7.2.1 Delta nøytral 49
7.2.2 Gamma nøytral 51

III Hedging og prising med kredittrisiko 54

8 Introduksjon til kredittrisiko 55

9 Mertons modell 57
9.1 Hedgingstrategi for ein risikabel obligasjon 58
9.2 Hedgingstrategi for kreditderivat 59
9.2.1 Gjeldsforsikring 59

10 Hedging med motpartrisiko 60
10.1 Prising av risikabel ECO 61
10.2 Hedgingstrategi for risikabel ECO 63

11 Oppsumering og konklusjon 67

IV Appendix 68

A Bevis 69
A.1 Normalfordeling 69
A.2 Multinormalfordeling 69

B R programmkode 71
B.1 Exhange opsjon 71
B.1.1 Program som simulerer hedginga 71
B.1.2 T-tester 75
B.2 The Greeks 76

Notasjon

Notasjon	Forklaring
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Normalfordeling med forventning μ og varians σ^2
W_t	Wienerprosess
$\widetilde{W}_t$	Wienerprosess under det risikonøytrale målet
$\mu_t, \mu(t,T)$	Driftledd for ein stokastisk prosess
$\sigma_t, v(t,T)$	Diffusjonsledd for ein stokastisk prosess
r_t	Stokastisk renteprosess
$\mathrm{d}t$	Endring i tida t
$\mathrm{d}W$	Wienerprosess$\sim N(0, \mathrm{d}t)$
$\mathrm{d}r_t$	Rentedynamikken
$\mathrm{d}P(t,T)$	Obligasjonsdynamikken
$P(t,T)$	Prisen på ein T-obligasjon
λ	Marknadsprisen på risiko
$\mathbb{E}(X)$	Forventningsverdien til X
$\chi, \Upsilon, \ldots$	Betegnelse på ulike opsjonar
V_t	Verdien til ei portefølgje ved tida t

Dei fleste notasjonar vil verte nærare forklart i teksten.

Del I

Introduksjon og generell finansteori

1 Innleiing

I denne oppgåva vil eg ta for meg komplett hedging av forskjellege finansielle kontraktar. For å gjere dette vil eg og, til ei viss grad, måtte gå inn på prisinga av desse kontraktane. At vi kan hedga eller replikere ei kontrakt vil seie at vi kan gjennskapa verdiutviklinga til denne kontrakta ved å investere i spotmarknaden. Dersom eg, til dømes, sel ein kjøpsopsjon på ein obligasjon til deg for ti kroner, kan eg investere desse pengane i marknaden på ein bestemt måte, og gjennom det sørgje for at porteføljga mi alltid har same verdi som opsjonen eg selde deg, eg replikerar då opsjonen.

Eg vil først gå raskt gjennom enkelte tema som er relevant for oppgåva, og viktige i matematisk finans generelt, som Wienerprosessar (Brownske rørsler), risikonøytralitet og liknande. Hovudvekta i oppgåva er på finansielle kontraktar som på ein eller annan måte er knytt til renteutviklinga. Dette vil vera spesielt relevant i forhold til kontraktar med lang løpetid, som er spesielt aktuelt i livsforsikring. Sidan vi stort sett arbeider med rentepapir vil T-obligasjonen, avsnitt 2.6.2 på side 12, spela ei viktig rolle som eit «referansepapir». I dei fleste tilfella eg kjem borti, som til dømes sals- og kjøpsopsjonar, er det likevel enkelt å erstatte T-obligasjonen med aksjar, marknadsindeksar og andre finansielle variablar som kan vera av interesse.

Sidan vi i praksis sjeldan har mogelegheit til å hedga kontinuerleg, kjem eg og inn på Delta-hedging, dette er ein hedgemetode som egnar seg betre for å hedga i diskret tid. Det går ut på å bruke opsjonar i tillegg til dei underliggjande papira i porteføljga. På denne måten klarer vi å kontrollere kor sensitiv porteføljga er i forhold til forskjellege variablar.

Mot slutten av oppgåva kjem eg inn på mogelegheitene for å hedga opsjonar som er utsett for kredittrisiko, det vil seie at det er fare for at motparten skal gå konkurs og ikkje klara å innfri forpliktingane sine, sjå kapittel 8. Eg brukar først Mertons modell, Merton (1974), for å finne verdien av ein risikabel obligasjon. Ut frå dette finn eg korleis vi kan hedga denne med utgangspunkt i ein sikker obligasjon. Deretter går eg vidare til ein kjøpsopsjon som er utsett for kredittrisiko hos utstedar. Mogelegheita for insolvens gir sjølvsagt ein meir komplisert prising av kontraktane, og fører og til at det vert vanskelegare å hedga desse. Det er likevel mogeleg å finne ei portefølje som kan replikera desse, dersom vi har oppfylt visse føresetnader. Som eit døme på dette finn eg, i avsnitt 10 på side 60, den hedgande porteføljga for ein Europeisk kjøpsopsjon som er utsett for kredittrisiko hos utstedar.

2
Grunnleggjande element

Eg vil her gå raskt gjennom element frå finansteorien som er viktige for denne oppgåva, for meir inngåande gjennomgang kan eg anbefale Björk (2004) for ein innføring og Shreve (2004) for litt meir vidarekomande. Ammann (2002) kan anbefalast for ei innføring i verdisetjing av kredittrisiko.

2.1 Wienerprosessen

Sidan Wienerprosessar er grunnlaget for heile vår modellering av finansmarknaden vil eg begynne med ein rask gjennomgang av denne. Wienerprosessen er i Björk (2004) definert som ein stokastisk prosess W som oppfyller følgjande fire kriteria.

Definisjon 2.1.1

- $W(0) = 0$.
- Den har uavhengige inkrementer, dvs. dersom $r < s \leq t < u$, er $W(u) - W(t)$ og $W(s) - W(u)$ uavhengige stokastiske variablar.
- For $s < t$ har den stokastiske variabelen $W(t) - W(s)$ ein Gaussisk fordeling $\mathcal{N}(0, t - s)$.
- W har kontinuerlege spor.

2.2 Arbitrage

Sidan heile denne teorien er bygd opp om antakinga om at marknaden skal vere fri for arbitrage, trengst det ein liten gjennomgang av kva arbitrage faktisk er. For å seie det enkelt er arbitrage ein sikker gevinst; det er mogeleg å få pengar av ingenting utan å ta ein risiko. Vi kan i følgje Björk (2004) definere ei portefølje med arbitrage som følgjer.

Definisjon 2.2.1

> Vi seier at vi har ein arbitragemogelegheit dersom vi kan setje saman ei portefølje, V^h, som er slik at
>
> $$\begin{aligned} V^h(0) &= 0, \\ P(V^h(T) \geq 0) &= 1, \\ P(V^h(T) > 0) &> 0. \end{aligned}$$
>
> Vi kallar marknaden arbitragefri dersom det ikkje eksisterer nokon arbitrage-mogelegheiter i marknaden.

Vi reknar ein arbitragemogelegheit som ein alvorleg feilprising i marknaden, og har som utgangspunkt at marknaden er effisient på den måten at vi ikkje har arbitregemogelegheiter.

Eit enkelt resultat vi får av dette arbitrageargumentet er at avkastninga til ein risikofri investering må vera lik den risikofrie renta r_t. Dette kan vi visa ved å ta utgangspunkt i

$$\mathrm{d}V^h(t) = k(t)V^h(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dersom $k(t) > r_t$ kan vi låna pengar i banken og betale renta r_t. Desse investerer vi i porteføljga V^h til ein avkastning på $k(t)$. No set vi, ved tida s der $s > t$, igjen med ein nettoforteneste på $k(s) - r_s$, som vi veit er positiv. Dersom $k(t) < r_t$ sel vi porteføljga short og set desse pengane i banken, som gir tilsvarande resultat, med forteneste $r_s - k(s)$. I begge desse tilfella er det arbitrage, slik at den einaste mogelegheita er $r_t = k(t)$.

2.3 Sjølvfinansierande

Ei sjølvfinansierande portefølje er ei portefølje der vi verken tar ut eller tilfører kapital, bortsett frå i enkelte tilfelle gjennom eit konsumledd c_t. Vi har berre lov å endra fordelinga av verdiar mellom dei ulike papira innad i porteføljga. Då forstår vi at endringar i verdien av denne porteføljga må koma gjennom endringar i verdien på papira porteføljga er sett saman av (for enkeltheits skuld seier vi her at ingen av verdipapira betalar utbytte).

Definisjon 2.3.1

Ei portefølje vert kalla sjølvfinansierande dersom verdiprosessen til denne følgjer

$$\mathrm{d}V^h(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i(t)\,\mathrm{d}S_i(t) - c(t)\,\mathrm{d}t.$$

I definisjonen over er c_t leddet konsum ved tida t. Dette er ofte lik 0, og eg kjem, dersom ingenting anna vert spesifisert, til å setje $c_t = 0$ gjennom heile denne oppgåva.

2.4 Stokastisk integrasjon

2.4.1 Itô-integral

Vi lar W vere ein $\{\mathcal{F}_t\}_{t\leq 0}$ Wienerprosess, og lar θ vere ein adaptert stokastisk prosess som tilfredsstiller

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T \theta_s^2\,\mathrm{d}s\Big] < \infty.$$

Adaptert kan vi definere på følgjande måte.

Definisjon 2.4.1

Dersom Y er ein stokastisk prosess slik at vi har

$$Y(t) \in \mathcal{F}_t$$

for alle $t \geq 0$, kan vi seie at Y er adaptert til filtreringa $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Då er

$$I_t = \int_0^t \theta_s\,\mathrm{d}W_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \theta_{(i-1)\frac{t}{n}} \big(W_{i\frac{t}{n}} - W_{(i-1)\frac{t}{n}}\big)$$

definert på $[0, T]$. Og I er kontinuerleg kvadratisk integrerbar her med

$$\mathbb{E}[(I_t - I_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\Big[\int_s^t \theta_u^2\,\mathrm{d}u \mid \mathcal{F}_s\Big], \quad s \leq t \leq T.$$

2.4.2 Itô's formel

La W vere ein Wienerprosess, og la $u \in C^{1,2}(R_+ \times R)$, $u(t,x)$ er kontinuerleg deriverbar i t, og dobbelderiverbar i x. La

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t}u(t,x), \\ u_x(t,x) &= \frac{\partial}{\partial x}u(t,x), \\ u_{xx}(t,x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x). \end{aligned}$$

Då har vi, med $W_0 = 0$,

$$u(t,W_t) = u(0,0) + \int_0^t (u_t(s,W_s) + \frac{1}{2}u_{xx}(s,W_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t u_x(s,W_s)\,\mathrm{d}W_s.$$

No lar vi A og B vere adapterte prosessar slik at

$$X_t = x + \int_0^t A_s\,\mathrm{d}s + \int_0^t B_s\,\mathrm{d}W_s$$

er definert. Då har vi

$$\begin{aligned} u(t,X_t) =& u(0,x) + \int_0^t (u_t(s,X_s) + A_s u_x(s,X_s) + \frac{1}{2}B_s^2 u_{xx}(s,X_s)\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t B_s u_x(s,X_s)\,\mathrm{d}W_s. \end{aligned}$$

Dette kan skrivast som

Teorem 2.4.2: Itô's formel

$$\mathrm{d}u(t,X_t) = u_t(t,X_t)\,\mathrm{d}t + u_x(t,X_t)\,\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}u_{xx}(t,X_t)(\mathrm{d}X_t)^2.$$

Med følgjande multiplikasjonstabell

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}t)^2 &= 0 \\ \mathrm{d}t \times \mathrm{d}W &= 0 \\ (\mathrm{d}W)^2 &= \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Dette er Itô's formel og denne vert brukt gjennom heile denne oppgåva.

2.4.3 Itô's formel i fleire dimensjonar

No tar vi utgangspunkt i ein n-dimensjonal Wienerprosess W som er gitt av $W(t) = (W_1(t), \dots, W_n(t))'$. Vi lar tilsvarande som i avsnitt 2.4.2 på førre side $u \in C^{1,2}(R_+ \times R)$. No er x ein d-dimensjonal vektor, $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, og vi har

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t} u(t,x), \\ u_{x_i}(t,x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} u(t,x), \\ u_{x_i x_j}(t,x) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(t,x). \end{aligned}$$

La X vere ein d-dimensjonal prosess definert av

$$\mathrm{d}X(t) = A(t)\,\mathrm{d}t + B(t)\,\mathrm{d}W(t),$$

her er $A(t)$ ein d-dimensjonal adaptert prosess, og B er ein $d \times n$ adaptert matrise prosess. Kvar komponent kan skrivast som

$$\mathrm{d}X_i(t) = A_i(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n} B_{ij}(t)\,\mathrm{d}W_j(t) = A_i(t)\,\mathrm{d}t + B_{i\cdot}(t)\,\mathrm{d}W(t).$$

No får vi Itô's formel som

Teorem 2.4.3: Itô's formel i fleire dimensjonar

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u(t, X(t)) = u_t(t, X(t))\,\mathrm{d}t &+ \sum_{i=1}^{d} u_{x_i}(t, X(t))\,\mathrm{d}X_i(t) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{n} u_{x_i x_j}(t, X(t))\,\mathrm{d}X_i(t)\,\mathrm{d}X_j(t). \end{aligned}$$

med følgjande multiplikasjonstabell

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}t)^2 &= 0, \\ \mathrm{d}t \times \mathrm{d}W_i &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ (\mathrm{d}W_i)^2 &= \mathrm{d}t, \quad i = 1, \dots, n, \\ \mathrm{d}W_i \times \mathrm{d}W_j &= \rho_{ij}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Her er ρ_{ij} korrelasjonen mellom W_i og W_j. Denne vil sjølvsagt vere 1 for $i = j$, og dersom vi har ein ukorrelert Wienerprosess vil vi ha $\rho_{ij} = 0$ for $i \neq j$.

2.5 Feynman-Kác

La X vere løysinga av

$$\mathrm{d}X_t = \mu(t, X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\,\mathrm{d}W_t.$$

La $f \in C(R)$ (kontinuerleg funksjon definert på heile R), $g \in C([0,T] \times R)$ og $k \in C([0,T] \times R)$ med $k(t,x) \geq 0$. Gå ut frå at for alle $(t,x) \in [0,T] \times R$,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq L(1+|x|^\lambda) \quad \text{eller} \quad f(x) \geq 0, \\ |g(t,x)| &\leq L(1+|x|^\lambda) \quad \text{eller} \quad g(t,x) \geq 0. \end{aligned}$$

for $L > 0$ og $\lambda \geq 2$. Vi går vidare ut frå at $u(t,x) \in C^{1,2}([0,T] \times R)$, og at denne tilfredsstiller på $[0,T) \times R$

$$u_t(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)u_{xx}(t,x) + \mu(t,x)u_x(t,x) - k(t,x)u(t,x) = g(t,x)$$

saman med grensebetinginga

$$u(T,x) = f(x).$$

Til slutt må vi gå ut frå at u tilfredsstiller

$$\max_{0 \leq t \leq T} |u(t,x)| \leq M(1+|x|^\eta)$$

for $M > 0$ og $\eta \geq 2$. Då kan $u(t,x)$ skrivast som

$$u(t,x) = \mathbb{E}\Big[f(X_T)e^{-\int_t^T k(v,X_v)\,\mathrm{d}v} + \int_t^T g(s,X_s)e^{\int_t^s k(v,X_v)\,\mathrm{d}v}\,\mathrm{d}s \mid X_t = x\Big].$$

Her er $g(t,x)$ konsum, og i denne oppgåva er $g(t,x) = 0$, som gir

$$u(t,x) = \mathbb{E}\Big[f(X_T)e^{-\int_t^T k(v,X_v)\,\mathrm{d}v} \mid X_t = x\Big].$$

For bevis sjå Karatzas og Shreve (1988).

2.6 Risikonøytralt mål

Vi bruker eit risikonøytralt mål, ofte kalla Q-målet, for å finne ei risikonøytral verdisetjing av eit derivat. Vi kan kalle Q eit EMM (Ekvivalent Martingale Mål).

Definisjon 2.6.1: EMM

Eit sannsynsmål Q på $\mathcal{F}_T$ vert kalla eit Ekvivalent Martingale Mål, dersom:

- Q er ekvivalent til P på $\mathcal{F}_T$.
- Alle prisprosessar $S_0, S_1, \dots, S_N$ er martingale på tidsintervallet $[0, T]$.

Dersom $Q \sim P$ har den eigenskapen at $S_0, S_1, \dots, S_N$ er lokale martingale, vert Q kalla eit lokalt martingale mål.

Teorem 2.6.2

Ein modell er arbitragefri viss og berre viss det eksisterer eit (lokalt) martingale mål, Björk (2004).

Når vi reknar ut den arbitragefrie prisen av eit finansielt derivat, gjer vi det som om vi lever i ei risikonøytral verd. Dette betyr **ikkje** at vi faktisk gjer det, eller trur vi gjer det. Denne måten å gjere det på held likevel for alle investorar, uavhengig av deira appetitt på risiko, så lenge dei føretrekkjer sikre pengar framfor usikre.

2.6.1 Girsanovs teorem

La W vere ein Wienerprosess, og la X vera ein adaptert prosess. Set så

$$\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t X_s \, \mathrm{d}s.$$

La Z vera løysinga på den stokastiske differensiallikninga

$$\mathrm{d}Z_t = X_t Z_t \, \mathrm{d}W_t, \quad Z_0 = 1.$$

Viss vi no set $Y_t = \ln Z_t$ og bruker Itô's formel, teorem 2.4.2 på side 8, på denne får vi

$$\mathrm{d}Y_t = \frac{1}{Z(t)} \, \mathrm{d}Z(t) - \frac{1}{2Z^2(t)} (\mathrm{d}Z(t))^2$$

Set inn for $\mathrm{d}Z_t$,

$$\mathrm{d}Y_t = X_t \, \mathrm{d}W_t - \frac{1}{2} X_t^2 \, \mathrm{d}t.$$

Når me no set inn for Y_t og bruker exponensialfunksjonen, får vi

$$Z_t = e^{\int_0^t X_s \, \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2} \int_0^t X_s^2 \, \mathrm{d}s}.$$

Dersom Novikovs betinging

$$\mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^T X_s\,\mathrm{d}s}\right] < \infty$$

er oppfylt kan det visast at Z er eit martingale på $[0, T]$ slik at vi har $\mathbb{E}[Z_T] = 1$. Ut frå dette kan vi definere målet $\tilde{P}$ på $(\Omega, \mathcal{F})$ ved

$$\tilde{P}(A) = \mathbb{E}[1_A Z_T]$$

og $\tilde{P}(\Omega) = \mathbb{E}[Z_T] = 1$, det vil seie at $\tilde{P}$ er eit sannsynsmål. No fortel Girsanovs teorem oss at under sannsynsmålet $\tilde{P}$, er prosessen $\widetilde{W}$ ein Wienerprosess.

2.6.2 T-obligasjonar

Ein T-obligasjon er eit verdipapir som gir eigaren av dette rett til ei utbetaling på 1 ved tida T. Desse obligasjonane har ingen kupongutbetaling, og vert derfor og ofte kalla «zero coupon bonds». Prisen på eit slikt papir ved tida t er vanleg å skriva som $P(t, T)$.

Dette er ikkje eit vanleg verdipapir i marknaden, men er nyttig i teorien, både for prising og hedging av andre papir. T-obligasjonar vil derfor verte brukt i stor utstrekning i denne oppgåva. Den vanlegaste typen av obligasjonar i marknaden er derimot obligasjonar med kupongutbetaling. Det vil seie at innehavaren av obligasjonen får utbetalt ein fast sum, typisk per år eller halvår.

Det er vanleg å modellere prisdynamikken til ein T-obligasjon på denne måten, Björk (2004),

$$\mathrm{d}P(t,T) = m(t,T)P(t,T)\,\mathrm{d}t + v(t,T)P(t,T)\,\mathrm{d}W_t, \quad t \leq T. \tag{2.1}$$

For å få denne under det risikonøytrale målet $\tilde{P}$, må vi bruke Girsanovs Teorem. Vi innfører den nye prosessen $\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t m(s,T)\,\mathrm{d}s$, som, frå Girsanovs teorem, òg er ein Wienerprosess. Dette gir

$$\begin{aligned}\mathrm{d}P(t,T) &= m(t,T)P(t,T)\,\mathrm{d}t + v(t,T)P(t,T)(\mathrm{d}\widetilde{W}_t - \lambda(t)\,\mathrm{d}t), \quad t \leq T \\ &= (m(t,T) - v(t,T)\lambda(t))P(t,T)\,\mathrm{d}t + v(t,T)P(t,T)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t.\end{aligned}$$

Marknadsprisen på risiko

Vi kallar λ prisen på risiko, og her må vi ha $\lambda(t) = \frac{m(t,T)-r_t}{v(t,T)}$. Denne er uavhengig av tid til utløpsdato. Vi ser at λ er «ekstraavkastinga» i forhold til marknadsrenta delt på volatiliteten, slik at denne kan verta sett på som marknaden sin risikoaversjon. Det er viktig å hugse på at denne risikoprisen er den same for alle verdiprosessar.

Dette gir den risikonøytrale dynamikken

$$\mathrm{d}P(t,T) = r_t P(t,T)\,\mathrm{d}t + v(t,T)P(t,T)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t, \quad t \leq T. \tag{2.2}$$

I resten av oppgåva set eg for enkeltheits skuld $\lambda = 0$, det vil seie at vi har ingen pris på risiko og $W = \widetilde{W}$.

Yield

Med yield meiner vi avkastninga på ein obligasjon eller den interne renta for obligasjonen. Dette er den konstante korte renta som vil gi obligasjonen den same verdien som marknaden har sett på denne. Dersom vi set y for yield må vi løyse følgjande uttrykk for å finne denne

$$P(t,T) = e^{-y(T-t)}$$

Dette gir for y

Definisjon 2.6.3

Yield ,y, for ein T-obligasjon er gitt som

$$y(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}.$$

2.7 Renter

Alt etter bruk, og kva ein er interessert i, har vi fleire forskjellege rentebegrep i marknaden. Desse er sjølvsagt ekvivalente og definert som følgjer.

Definisjon 2.7.1

1 Forward renta for perioden $[S,T]$ ved tida t, vanlegvis kalla LIBOR (London Interbank Offered Rate) forward rate, er definert som

$$L(t;S,T) = -\frac{P(t,T) - P(t,S)}{\tau(S,T)P(t,T)}.$$

2 Spot renta for perioden $[S,T]$, kalla LIBOR spotrente, er definert som

$$L(S,T) = -\frac{P(S,T) - 1}{\tau(S,T)P(S,T)}.$$

3 Den kontinuerlege forward renta for $[S,T]$, ved tida t, er definert som

$$R(t;S,T) = -\frac{\ln P(t,T) - \ln P(t,S)}{\tau(S,T)}.$$

4 Den kontinuerlege spotrenta for perioden $[S,T]$, er definert som

$$R(S,T) = -\frac{\ln P(S,T)}{\tau(S,T)}.$$

5 Forward renta for T, ved tida t, er definert som

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}.$$

6 Den korte renta ved tida t, er definert som

$$r_t = f(t,t).$$

I alle tilfella over er $P(t,T)$ prisen på ein T-obligasjon, avsnitt 2.6.2 på side 12, og $\tau(S,T)$ er tida mellom S og T. Typisk er $\tau(S,T) = T - S$, og sjølv om vi i praksis kan avvike frå dette av ymse årsaker, vil dette vere tilfellet gjennom heile denne oppgåva.

Av desse rentemodellane er dei kontinuerlege versjonane dei vi bruker i teorien, medan dei andre vanlegvis vert nytta av marknaden.

2.7.1 Korte rentemodellar

For å modellere den korte renta r_t, bruker vi typisk følgjande risikonøytrale Wienerprosess, avsnitt 2.6 på side 10,

Definisjon 2.7.2

$$dr_t = \mu(t,r_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t,r_t)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t.$$

Vi har mange forskjellege versjonar av definisjon 2.7.2 på førre side å velje mellom, og eg kan mellom anna nemne:

$$
\begin{aligned}
&\text{Ho-Lee:} && \mathrm{d}r_t = \theta(t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t,\\
&\text{Vasicek:} && \mathrm{d}r_t = a(b - r_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t,\\
&\text{Hull-White:} && \mathrm{d}r_t = (\theta(t) - a(t)r_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t,\\
&\text{Cox-Ingersoll-Ross (CIR):} && \mathrm{d}r_t = a(b - r_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r_t}\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t,\\
&\text{Black-Derman-Toy:} && \mathrm{d}r_t = \theta(t)r_t\,\mathrm{d}t + \sigma(t)r_t\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t.
\end{aligned}
$$

Når det gjeld Black-Derman-Toy modellen herskar det ein viss usemje, og i Musiela og Rutkowski (2005) er det gitt følgjande definisjon

$$\mathrm{d}\ln r_t = (a(t) - b(t)\ln r_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t.$$

I denne oppgåva vil eg først og fremst bruke Ho-Lee og Hull-White som døme. Vi ser og at Vasicek berre er eit spesialtilfelle av Hull-White med konstante parameter, slik at vi lett kan finne resultata for denne og.

2.7.2 Forward renta

Ein annan måte å modellere renta på, er å modellere heile forward renta. Det vil seie renta vi, ved tida t, teoretisk skal ha ved tida T , der vi må ha $t < T$.

Grunngjeving for Forward renta

For å finne eit uttrykk for denne renta, startar vi med å finne renta mellom to tidspunkt som ligg fram i tid, i dette tilfellet S og T, der $t < S < T$.

1 Ved tida t, sel ein S-obligasjon. For denne får vi $P(t, S)$, bruk så desse pengane til å kjøpe $\frac{P(t,S)}{P(t,T)}$ T-obligasjonar, desse disposisjonane gir ingen netto kontantstraum ved tida t.

2 Ved tida S går S-obligasjonen ut og vi må betale ut 1.

3 Ved tida T går T-obligasjonen ut, desse er då verdt 1 kvar og vi mottar $\frac{P(t,S)}{P(t,T)}$.

Ut frå dette ser vi at ei investering på 1 ved tida S, er verdt $\frac{P(t,S)}{P(t,T)}$ ved tida T. For at vi no ikkje skal ha arbitrage må (LIBOR) forward renta oppfylle

$$1 + \tau(S, T)F(t, S, T) = \frac{P(t, S)}{P(t, T)}. \tag{2.3}$$

Her er $\tau(S,T)$ som tidlegare tida mellom S og T. Viss vi no løyser formel 2.3 på førre side med omsyn på forwardrenta frå S til T, $F(t,S,T)$ får vi

$$F(t,S,T) = \frac{1}{\tau(S,T)}\left(\frac{P(t,S)}{P(t,T)} - 1\right).$$

No kan vi finne forward renta ved T, $f(t,T)$, ved å erstatte S med T, T med $T+h$, og la h gå mot 0.

$$\begin{aligned}
f(t,T) &= \lim_{h\to 0} F(t,T,T+h) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\frac{P(t,T)}{P(t,T+h)} - 1\Big) \\
&= -\lim_{h\to 0} \frac{1}{P(t,T+h)} \cdot \frac{P(t,T+h) - P(t,T)}{h} \\
&= -\lim_{h\to 0} \frac{1}{P(t,T+h)} \lim_{h\to 0} \frac{P(t,T+h) - P(t,T)}{h} \\
&= -\frac{1}{P(t,T)} \frac{\partial}{\partial T} P(t,T) \\
&= -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t,T).
\end{aligned}$$

Ser at

$$f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t,T),$$

som igjen gir prisen på ein T-obligasjon utrykt ved forward renta

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,u)\,\mathrm{d}u}.$$

Viss vi lar $T \downarrow t$ er vi tilbake til korttidsrenta ved tida t

$$r_t = r(t) = \lim_{T\to t} f(t,T) = f(t,t).$$

HJM

Heath-Jarrow-Morton modellerte heile forwardkurven direkte, Heath *et al.* (1992),

$$\mathrm{d}f(t,T) = \alpha(t,T)\,\mathrm{d}t + \sigma(t,T)\,\mathrm{d}W_t, \quad t \le T \le T^*, \tag{2.4}$$

her er W ein $\{\mathcal{F}\}_{t\ge 0}$ Wiener prosess under P, og $\alpha(t,T)$ og $\sigma(t,T)$ er begge $\mathcal{F}_t$ adapterte.

HJM betinginga

Heath-Jarrow-Morton betinginga gir ein samanheng mellom driftleddet til forwardrenta, α, og volatiliteten, σ, dersom vi tar utgangspunkt i at vi skal ha ein arbitragefri marknad.

Teorem 2.7.3

> For at vi skal ha ein arbitragefri marknad må vi ha
>
> $$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)(\gamma_t - S(t,T)),$$
>
> der
>
> $$S(t,T) = -\int_t^T \sigma(t,s)\,\mathrm{d}s.$$

Og γ_t er prisen på risiko og berre avhengig av t, for bevis sjå Björk (2004). Kan og sjå frå formel 2.6 at $\gamma_t = 0$ under det risikonøytrale målet $\tilde{P}$, avsnitt 2.6 på side 10.

2.7.3 Forhold mellom modellar

Dersom vi har gitt forward dynamikken frå formel 2.4 på førre side, må dynamikken til den korte renta

$$\mathrm{d}r_t = a_t\,\mathrm{d}t + b_t\,\mathrm{d}W_t,$$

oppfylle

$$\begin{aligned} a_t &= f_T(t,t) + \alpha(t,t), \\ b_t &= \sigma(t,t). \end{aligned}$$

Når formel 2.4 på førre side er gitt, må og obligasjonsdynamikken

$$\mathrm{d}P(t,T) = m(t,T)P(t,T)\,\mathrm{d}t + v(t,T)P(t,T)\,\mathrm{d}W_t, \tag{2.5}$$

oppfylle

$$\begin{aligned} m(t,T) &= r_t + A(t,T) + \frac{1}{2}S^2(t,T), \\ v(t,T) &= S(t,T). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Her er

$$A(t,T) = -\int_t^T \alpha(t,s)\,\mathrm{d}s,$$
$$S(t,T) = -\int_t^T \sigma(t,s)\,\mathrm{d}s.$$

Vi har og ein relasjon som går andre vegen, dersom formel 2.5 på førre side er gitt må forwarddynamikken frå formel 2.4 på side 16 oppfylle

$$\alpha(t,T) = v_T(t,T)v(t,T) - m_T(t,T),$$
$$\sigma(t,T) = -v_T(t,T).$$

Desse forholda er vist i Björk (2004).

2.7.4 Bankkonto

Vi seier at bankkontoen, B, gir ein sikker avkastning som til einkvar tid er lik den korte renta, r.

$$\mathrm{d}B_t = r_t B_t\,\mathrm{d}t.$$

Som ein kan sjå ikkje noko volatilitetsledd, berre drift. Dette gir sjølvsagt og $B_t = e^{\int_0^t r_s\,\mathrm{d}s}$.

2.8 Finansielle kontraktar

Her har eg ein liten oversikt over dei kontrakttypane som er brukt i oppgåva. I alle tilfella under betyr European at kontrakta må fullførast på ein på førehand bestemt dato, i motsetnad til til dømes American som tyder at vi kan gjennomføra handelen når som helst fram til denne datoen. Dersom ingenting anna er spesifisert vil alle opsjonar i denne oppgåva vera av den europeiske typen. Definisjonane har eg henta frå Jarrow (2002) og Hull (2006).

European Call Option (ECO-Europeisk kjøpsopsjon). Ei kontrakt som gir innehavaren rett, men ikkje plikt, til å kjøpe eit verdipapir av utstedar. Dette skal skje på ein på førehand avtalt dato, til ein på førehand avtalt pris.

European Put Option (Europeisk salsopsjon). Tilsvarande som ECO, men gir innehavaren rett til å selje til utstedar.

European Exchange Option (Europeisk bytteopsjon). Ei kontrakt som gir innehavaren rett, men ikkje plikt til å bytte ein andel i eit på førehand valt verdipapir i ein andel i eit anna på førehand valt verdipapir.

Swap Kontrakt mellom to partar om å bytte kontantstraumar ein gong i framtida, den definerer datoen for betaling og måten denne skal reknast ut på. Vanleg at vi kan bytte LIBOR-renta i ei fast rente, på kapital av ein bestemt mengde over ein bestemt periode.

Caplet Dette er ein kjøpsopsjon på ei spesifisert renta over ein periode (utbetaling når renta er over eit gitt nivå.)

Cap Kjøpsopsjonar på LIBOR-renta over fleire periodar, kan tenkje på den som summen av eit antal capletar.

Floor Tilsvarande salsopsjon på ei spesifisert renta (utbetaling når renta er under eit gitt nivå).

Swaption Kjøps- eller salsopsjon på ei swap-kontrakt.

2.9 «Change of numeraire»

Endring av numeraire er ein teknikk vi bruker til å finne prisen på ulike derivat, den er derfor til stor hjelp når det gjeld å finne replikerande porteføljer for desse derivata og.

For å vise denne startar vi med å definere $S_0(t), \ldots, S_k(t)$ som k omsettelege verdipapir med følgjande prisutvikling under det risikonøytrale målet $\tilde{P}$,

$$\mathrm{d}S_i(t) = r_t S_i(t)\,\mathrm{d}t + S_i(t)\sigma_i(t)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t, \quad i = 0,1,\ldots,k.$$

Teorien om change of numeraire,Björk (2004), seier at vi kan definere k nye variablar, $Z_0(t), \ldots, Z_k(t)$, der $Z_i(t) = \frac{S_i(t)}{S_0(t)}$, og Z_i vil ha dynamikken

$$\mathrm{d}Z_i(t) = Z_i(t)(\sigma_i(t) - \sigma_0(t))\,\mathrm{d}W_t^0, \quad i = 0,1,\ldots,k,$$

under det nye målet P^0. Dersom Z_i er ei martingale, noko vi her går ut frå at den er, og $\sigma_i(t)$ er **deterministisk**, vil fordelinga til $\log Z_i(s), s \leq t$, gitt F_s vera

$$\log Z_i(t) \sim \mathcal{N}\big(\log Z_i(s) - \frac{1}{2}a_i^2(s,t), a_i^2(s,t)\big),$$

der

$$a_i^2(s,t) = \int_s^t |\sigma_i(u) - \sigma_0(u)|^2 \, \mathrm{d}u.$$

Her er $\mathbb{E}^0$ forventninga under P^0. No vil prisen på eit krav χ vera gitt som

$$\pi_\chi(t,T) = S_0(t) \, \mathbb{E}^0 \Big[\frac{\chi}{S_0(T)} \mid \mathcal{F}_t \Big].$$

Som ein ser er dette ein teknikk som kan brukast i for å prise mange forskjellege derivat, ein kan velje numeraire ut frå kva som passar best til akkurat det derivatet ein er interessert i å finne prisen på. Til dømes er forward målet, der vi bruker ein T-obligasjon å diskontere med, og diskontering med bankkonto B_t er berre spesialtilfelle av denne teknikken, derfor går eg heller ikkje gjennom desse metodane.

Del II

Hedging og prising av sikre derivat.

3

Hedging ved bruk av obligasjonar i ein korttidsrentemodell

I dette kapittelet skal eg finne ei portefølje, V, som består av obligasjonar utan kupongutbetaling med to forskjellege utløpsdatoar. Denne porteføljga skal replikera ei kontrakt av europeisk type, χ, som har den eine av desse to obligasjonane som underliggjande verdipapir, T-obligasjonen. Termindatoen, S, for χ skal samsvara med utløpsdatoen til den andre obligasjonen, S-obligasjonen, i porteføljga. Denne porteføljga må sjølvsagt og vera sjølvfinansierande, sjå definisjon 2.3.1 på side 7.

For å finne denne porteføljga kan ein gå fram på følgjande måte. Eg tek som utgangspunkt renta frå definisjon 2.7.2 på side 14,

$$\mathrm{d}r_t = \mu(t, r_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, r_t)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t.$$

Og vi har frå formel 2.2 på side 13 at T og S obligasjonane har følgjande dynamikk, $S < T$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}P(t, T) &= r_t P(t, T)\,\mathrm{d}t + v(t, T)P(t, T)\,\mathrm{d}W_t \\
\mathrm{d}P(t, S) &= r_t P(t, S)\,\mathrm{d}t + v(t, S)P(t, S)\,\mathrm{d}W_t.
\end{aligned}$$

For å finne hedgingstrategien for χ, med termindato S må vi konstruere ei sjølvfinansierande portefølje som består av ϕ S-obligasjonar og η T-obligasjonar, $V_t = \phi_t P(t, S) + \eta_t P(t, T)$, og som oppfyller $V_S = \chi$.

For å unngå arbitrage må denne porteføljga oppfylle

$$V_t = \pi_\chi(t,S) = \mathbb{E}[\chi e^{-\int_t^S r_s ds} \mid \mathcal{F}_t].$$

I ei sjølvfinansierande portefølje må som vist tidlegare i oppgåva endringar i verdien koma av endringar i verdien av obligasjonane, då får vi i dette tilfellet

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V_t &= \phi_t \,\mathrm{d}P(t,S) + \eta_t \,\mathrm{d}P(t,T) \\
&= \phi_t r_t P(t,S)\,\mathrm{d}t + \phi_t v(t,S)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t + \eta_t r_t P(t,T) dt + \eta_t v(t,T) P(t,T)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t \\
&= (\phi_t r_t P(t,S) + \eta_t r_t P(t,T))\,\mathrm{d}t + (\phi_t v(t,S) P(t,S) + \eta_t v(t,T) P(t,T))\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t.
\end{aligned}$$

Vi kan skrive $V_t = F(t, r_t)$, og viss vi no antek $F \in C^{1,2}(R_+ \times R)$ og bruker Ito's formel, teorem 2.4.2 på side 8, på $F(t, r_t)$ får vi

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}F(t,r_t) = &F_t(t,r_t)\,\mathrm{d}t + F_r(t,r_t)\,\mathrm{d}r + \frac{1}{2}F_{rr}(t,r_t)(\mathrm{d}r)^2 \\
=&(F_t(t,r_t) + \mu(t,r_t)F_r(t,r_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,r_t)F_{rr}(t,r_t))\ \mathrm{d}t \\
&+ \sigma(t,r_t)F_r(t,r_t)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t.
\end{aligned}$$

Kan setje $dV_t = dF(t, r_t)$, dette gir

$$F_t(t,r_t) + \mu(t,r_t)F_r(t,r_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,r_t)F_{rr}(t,r_t) = \phi_t r_t P(t,S) + \eta_t r_t P(t,T).$$

Vi har frå Feynman-Kàc, avsnitt 2.5 på side 10,

$$F_t(t,r_t) + \mu(t,r_t)F_r(t,r_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,r_t)F_{rr}(t,r_t) = r_t F(t,r_t).$$

Dette gir

$$F(t,r_t) = \phi_t P(t,S) + \eta_t P(t,T)$$

$$\eta_t = \frac{F(t,r_t) - \phi_t P(t,S)}{P(t,T)} \tag{3.1}$$

og

$$\phi_t v(t,S)P(t,S) + \eta_t v(t,T)P(t,T) = \sigma(t,r_t)F_r(t,r_t). \tag{3.2}$$

Saman gir formel 3.1 på førre side og formel 3.2 på førre side

$$\phi_t v(t,S)P(t,S) + v(t,T)F(t,r_t) - v(t,T)\phi_t P(t,S) = \sigma(t,r_t)F_r(t,r_t)$$

Som gir ϕ som

$$\phi_t = \frac{\sigma(t,r_t)F_r(t,r_t) - v(t,T)F(t,r_t)}{(v(t,S) - v(t,T))P(t,S)}. \tag{3.3}$$

Og viss vi set denne inn i formel 3.1 på førre side får vi

$$\eta_t = \frac{v(t,S)F(t,r_t) - \sigma(t,r_t)F_r(t,r_t)}{P(t,T)(v(t,S) - v(t,T))}. \tag{3.4}$$

$F(t,r_t)$ og $F_r(t,r_t)$ er gitt av følgjande partielle differensiallikning

$$\begin{aligned} &F_t(t,x) + \mu(t,x)F_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)F_{xx}(t,x) - rF(t,x) = 0 \\ &F(S,x) = \chi. \end{aligned}$$

Denne kan løysast numerisk for å finne $F(t,r_t)$ og $F_r(t,r_t)$, forutsatt at vi kjenner randkrava for denne. Og vi vil ved å løyse denne finne den hedgande porteføljga som ved tida t vil bestå av eit antal S-obligasjonar ϕ_t, gitt ved formel 3.3, og eit antal T-obligasjonar η_t, gitt ved formel 3.4. Som ein ser vil denne porteføljga vera avhengig av ein kontinuerleg oppdatering av antalet T- og S-obligasjonar for å replikera derivatet. Ein vil og få forskjellege verdiar for $\sigma(t,r_t)$ og $v(t,r_t)$ etter kva modell ein brukar for korttidsrenta, dette er vist under med Ho-Lee- og Hull-White prosessane som døme.

3.1 Ho-Lee

No går vi ut frå at renta følgjer ein Ho-Lee modell frå definisjon 2.7.1 på side 14 har vi at renta då er gitt som:

$$\mathrm{d}r_t = \theta(t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t.$$

I ein slik modell har vi frå avsnitt 2.7.3 på side 17 at,

$$
\begin{aligned}
\sigma(t, r_t) &= \sigma, \\
v(t, T) &= -\int_t^T \sigma ds = \sigma(t - T).
\end{aligned}
$$

Vi får no dersom vi set inn dette i formel 3.3 på førre side og formel 3.4 på førre side uttrykk for andelane i dei to obligasjonane i ein Ho-Lee modell

$$
\begin{aligned}
\phi_t &= \frac{F_r(t, r_t) + (T - t)F(t, r_t)}{(T - S)P(t, S)}, \\
\eta_t &= -\frac{(S - t)F(t, r_t) + F_r(t, r_t)}{P(t, T)(T - S)}.
\end{aligned}
$$

3.2 Hull-White

No går vi ut frå at den korte renta r_t følgjer ein Hull-White modell, definisjon 2.7.1 på side 14,

$$
\mathrm{d}r_t = (\theta(t) - ar_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t.
$$

I ein slik modell har vi frå avsnitt 2.7.3 på side 17 at volatiliteten til forwardrenta og obligasjonane er gitt som

$$
\begin{aligned}
\sigma(t, r_t) &= \sigma, \\
v(t, T) &= -\int_t^T \sigma e^{-a(s-t)} ds = -\frac{\sigma}{a}(1 - e^{-a(T-t)}).
\end{aligned}
$$

Dette gir, når vi set inn i formlane over, desse uttrykka for ϕ_t og η_t,

$$
\begin{aligned}
\phi_t &= \frac{aF_r(t, r_t) + (1 - e^{a(T-t)})F(t, r_t)}{(e^{-as} - e^{-aT})e^{at}P(t, S)}, \\
\eta_t &= -\frac{(1 - e^{-a(S-t)})F(t, r_t) + aF_r(t, r_t)}{P(t, T)e^{at}(e^{-aS} - e^{-aT})}.
\end{aligned}
$$

4

Hedging med obligasjon og bankkonto

No vil vi finne ein tilsvarande sjølvfinansierande portefølje som skal vera samansett av den underliggjande obligasjonen og andelar i bankkonto. Vi har gitt i avsnitt 2.6.2 på side 12 og avsnitt 2.7.4 på side 18 at obligasjonen og bankkontoen har følgjande dynamikk, her med $\lambda = 0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}P(t,T) &= r_t P(t,T)\,\mathrm{d}t + v(t,T)P(t,T)\,\mathrm{d}W_t, \\ \mathrm{d}B_t &= r_t B_t\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

No tek vi utgangspunkt i at χ er eit $\mathcal{F}_S$ målbart contingent claim og $S < T$.
V er sjølvfinansierande, $V_t = \psi_t B_t + \phi_t P(t,T)$ og $V_S = \chi$, $\pi_\chi(t) = V_t$. Definerer $Z(t,T) = B_t^{-1}P(t,T)$ og bruker Itô's formel på $Z(t,T)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Z(t,T) &= -B_t^{-2}P(t,T)\,\mathrm{d}B_t + B_t^{-1}\,\mathrm{d}P(t,T) \\ &= v(t,T)Z(t,T)\,\mathrm{d}W_t. \end{aligned}$$

Dersom vi definerer $H_t = \mathbb{E}(B_S^{-1}\chi \mid \mathcal{F}_S)$ er H ein martingale under P. Har då for ein $\tilde{h}_s$ som oppfyller visse krav

$$\begin{aligned} H_t &= H_0 + \int_0^t \tilde{h}_s\,\mathrm{d}\widetilde{W}_s = H_0 + \int_0^t \phi_s\,\mathrm{d}Z(s,T) \\ \phi_s &= \frac{\tilde{h}_s}{v(s,T)Z(s,T)}. \end{aligned}$$

Definerer $\psi_t = H_t - \phi_t Z(t,T)$ og får

$$V_t = \psi_t B_t + \phi_t P(t,T) = H_t B_t - \phi_t Z(t,T) B_t + \phi_t P(t,T) = H_t B_t.$$

Dette gir sjølvsagt

$$V_S = H_S B_S = B_S \tilde{\mathbb{E}}[B_S^{-1}\chi \mid \mathcal{F}_S] = B_S B_S^{-1}\chi = \chi.$$

Vidare

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V_t &= H_t \, \mathrm{d}B_t + B_t \, \mathrm{d}H_t \\ &= (\psi_t + \phi_t Z(t,T)) \, \mathrm{d}B_t + B_t \phi_t \, \mathrm{d}Z(t,T) \\ &= \psi_t \, \mathrm{d}B_t + \phi_t (Z(t,T) \, \mathrm{d}B_t + B_t \, \mathrm{d}Z(t,T)) \\ &= \psi_t \, \mathrm{d}B_t + \phi_t \, \mathrm{d}P(t,T). \end{aligned}$$

No ser vi at V er sjølvfinansierande og at $V_S = \chi$, vi har vist at V hedger kravet χ. Andelen av denne porteføljga som skal vera henholdsvis i T-obligasjonar og i banken er gitt av

$$\phi_t = \frac{\tilde{h}_t B_t}{v(t,T) P(t,T)}$$

og

$$\psi_t = \frac{V_t - \phi P(t,T)}{B_t}.$$

Sidan vi ikkje har noko uttrykk for $\tilde{h}$ kan vi ikkje få eit eksplisitt svar frå denne framgangsmåten, men den viser forholdet mellom andelen i banken og obligasjonen, og hjelper på den generelle forståinga.

For å få eit betre svar må vi angripe problemet på ein litt annan måte. Vi begynner med å laga ei sjølvfinansierande portefølje, $V_t = \phi_t B_t + \eta_t P(t,T)$, denne må sjølvsagt oppfylle $V_S = \chi$, der χ framleis er den same. Sidan den er sjølvfinansierande oppfyller den og

$$\mathrm{d}V_t = \phi_t \, \mathrm{d}B_t + \eta_t \, \mathrm{d}P(t,T) = r_t V_t \, \mathrm{d}t + v(t,T) P(t,T) \eta_t \, \mathrm{d}W_t \tag{4.1}$$

Dersom vi diskonterer formel 4.1 med bankkontoen får vi

$$\mathrm{d}(B_t^{-1} V_t) = v(t,T) P(t,T) \eta_t B_t^{-1} \, \mathrm{d}W_t. \tag{4.2}$$

Vi går ut frå at prisen på derivatet ved tida t berre er avhengig av obligasjonsprisen (sjølvsagt kjem korttidsrenta inn gjennom denne). Dersom det er slik kan denne uttrykkjast som $\pi(t, P(t,T))$, og når vi bruker Itô's formel på dette uttrykket får vi

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\pi(t,P(t,T)) =&\pi_t(t,P(t,T))\,\mathrm{d}t + \pi_P(t,P(t,T))\,\mathrm{d}P(t,T)\\
&+\frac{1}{2}\pi_{PP}(t,P(t,T))(\mathrm{d}P(t,T))^2\\
=&\Big(\pi_t(t,P(t,T)) + r_t\pi_P(t,P(t,T))P(t,T)\\
&+\frac{1}{2}v^2(t,T)\pi_{PP}\big(t,P(t,T)\big)P^2(t,T)\Big)\,\mathrm{d}t\\
&+\pi_P(t,P(t,T))v(t,T)P(t,T)\,\mathrm{d}W_t. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

No diskonterer vi formel 4.3 med bankkontoen og får

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\big(B_t^{-1}\pi(t,P(t,T))\big) =& - B_t^{-2}\pi(t,P(t,T))\,\mathrm{d}B_t + B_t^{-1}\,\mathrm{d}\pi(t,P(t,T))\\
=&B_t^{-1}\Big(\pi_t(t,P(t,T)) + r_t\pi_P(t,P(t,T))P(t,T)\\
&+\frac{1}{2}v^2(t,T)\pi_{PP}\big(t,P(t,T)\big)P^2(t,T)\\
&-r_t\pi(t,P(t,T))\Big)\mathrm{d}t + B_t^{-1}\pi_P(t,P(t,T))v(t,T)P(t,T)\,\mathrm{d}W_t.
\end{aligned} \qquad (4.4)$$

For at den sjølvfinansierande porteføljga, V, skal hedga derivatet må den oppfylle

$$\mathrm{d}(B_t^{-1}V_t) = \mathrm{d}\big(B_t^{-1}\pi(t,P(t,T))\big). \qquad (4.5)$$

No har vi av formel 4.1 på førre side, formel 4.4 og formel 4.5 at

$$B_t^{-1}\pi_P(t,P(t,T))v(t,T)P(t,T) = v(t,T)P(t,T)\eta_t B_t^{-1},$$

Dette gir antalet T-obligasjonar i porteføljga

$$\eta_t = \pi_P\big(t,P(t,T)\big). \qquad (4.6)$$

Og då må vi sjølvsagt ha resten i bankkontoen

$$\begin{aligned}
\phi_t &= \frac{\pi(t,P(t,T)) - \eta_t P(t,T)}{B_t}\\
&= \frac{\pi(t,P(t,T)) - P(t,T)\pi_P(t,P(t,T))}{B_t}
\end{aligned} \qquad (4.7)$$

No har vi

$$d(B_t^{-1}V_t) = d(\pi(t, P(t,T))B_t^{-1}).$$

Dette gir ved integrasjon

$$B_t^{-1}V_t - V_0 = \pi(t, P(t,T))B_t^{-1} - \pi(0, P(0,T))$$

No ser vi at denne porteføljga vil hedga derivatet dersom $V_0 = \pi(0, P(0,T))$. I dette tilfellet ser vi at vi som i det føregåande er avhengig av å kunne rebalansere porteføljga kontinuerleg for å få ein fullkommen hedging.

Eksempel 4.0.1: European Call option

I tilfellet med ein **European Call Option** har vi at utbetalinga ved tida S er gitt som differansen mellom prisen på det underliggjande verdipapiret ved tida S, i dette tilfellet ein T-obligasjon, og eit på førehand fastsett beløp K dersom dette er positivt, $\Phi(P(S,T)) = (P(S,T) - K)^+$. Denne opsjonen vil ved tida t ha pris

$$\pi(t,T) = P(t,T)\mathcal{N}(d) - KP(t,S)\mathcal{N}(d - b(t,S,T)) \tag{4.8}$$

Her er d og $b(t,S,T)$ gitt som

$$\begin{aligned} d &= \frac{\ln \frac{P(t,T)}{KP(t,S)} + \frac{1}{2}b^2(t,S,T)}{b(t,S,T)} \\ b^2(t,S,T) &= \int_t^S \big(v(s,T) - v(s,S)\big)^2 \, ds. \end{aligned} \tag{4.9}$$

vi er her avhengig av at $v(s,T)$ og $v(s,S)$ er deterministiske.

Dersom vi no deriverer formel 4.8 med omsyn på $P(t,T)$ får vi

$$\pi_P(t, P(t,T)) = \mathcal{N}(d) + P(t,T)\mathcal{N}'(d)d_P - KP(t,S)\mathcal{N}'(d - b(t,S,T))d_P$$

Har vist i avsnitt A.1 på side 69 at

$$KN'(d - b(t,S,T)) = \frac{P(t,T)}{P(t,S)}\mathcal{N}'(d)$$

Dette gir at $\pi_P(t, P(t,T)) = \mathcal{N}(d)$ som saman med formel 4.7 på side 28 gir

$$\eta_t = \mathcal{N}(d_1)$$
$$\phi_t = -\frac{KP(t,S)\mathcal{N}(d_2)}{B_t},$$

der

$$d_1 = \frac{\ln \frac{P(t,T)}{KP(t,S)} + \frac{1}{2}b^2(t,S,T)}{b(t,S,T)}$$
$$d_2 = d_1 - b(t,S,T).$$

No ser vi at porteføljga $V_t = \phi_t B_t + \eta_t P(t,T)$ vil replikere denne opsjonen. Denne porteføljga vil alltid bestå av ein kort posisjon i bankkontoen (låna pengar i banken) og ein lang posisjon, som består av pengane vi lånte av banken og verdien av opsjonen, i T-obligasjonar. Gjennom å bruke put-call pariteten, avsnitt 7.1 på side 46, kan vi lett finne den tilsvarande prisen og hedgen for ein European put option på det same verdipapiret med same utløpsdato.

5 Hedgingstrategi ved bruk av «change of numeraire»

I dette kapittelet tek eg utgangspunkt i at eg ønskjer å hedga eit krav av forma $\chi = \Phi(P(T,T_1), P(T,T_2))$, som er homogent av første grad, med utbetaling ved tid T, $T < T_1 < T_2$. Så går vi ut frå at obligasjonane følgjer den vanlege dynamikken frå avsnitt 2.6.2 på side 12

$$\mathrm{d}P(t,T) = r_t P(t,T)\,\mathrm{d}t + v(t,T)P(t,T)\,\mathrm{d}W_t.$$

Går deretter ut frå at sidan utbetalinga ved utløpsdato T på dette kravet berre er avhengig av prisane $P(T,T_1)$ og $P(T,T_2)$, kan kravet hedgast av ei sjølvfinansierande portefølje som er samansett av desse to obligasjonane,

$$\pi_\chi(t,T) = V_t = \phi_t P(t,T_1) + \eta_t P(t,T_2)$$

og

$$dV_t = \phi_t\,\mathrm{d}P(t,T_1) + \eta_t\,\mathrm{d}P(t,T_2).$$

No bruker vi $P(t,T_1)$ som numeraire, det gir $Z_0(t) = 1$ og $Z_1(t) = \frac{P(t,T_2)}{P(t,T_1)}$
Vi har frå teorien om endring av numeraire, avsnitt 2.9 på side 19, at porteføljga

og er sjølvfinansierande i Z-marknaden. Det gir

$$\mathrm{d}V_t^Z = \eta_t \,\mathrm{d}Z_1(t) \tag{5.1}$$

og vi har

$$V_t^Z = \frac{V_t}{P(t,T_1)} = \frac{\pi_\chi(t,T)}{P(t,T_1)} \stackrel{\text{def}}{=} C(t, Z_1(t)).$$

Z_1 har desse eigenskapane

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Z_1(t) &= Z_1(t)\big(v(t,T_2) - v(t,T_1)\big)\,\mathrm{d}W_t^0 \\
(\mathrm{d}Z_1(t))^2 &= Z_1^2(t)\sigma_Z^2(t)\,\mathrm{d}t \\
\sigma_Z^2 &= (v(t,T_2) - v(t,T_1))^2.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Dersom vi no bruker Itò's formel på $C(t, Z_1(t))$

$$\begin{aligned}
dC(t,Z_1(t)) &= C_t(t,Z_1(t))\,\mathrm{d}t + C_x(t,Z_1(t))\,\mathrm{d}Z_1(t) + \frac{1}{2}C_{xx}(t,Z_1(t))(\mathrm{d}Z_1(t))^2 \\
&= C_x(t,Z_1(t))\,\mathrm{d}Z_1(t) + (C_t(t,Z_1(t)) + \frac{1}{2}C_{xx}(t,Z_1(t))Z_1^2(t)\sigma_Z^2)\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Sidan $r_t = \mu(t,T) = 0$ i tilfellet for $C(t, Z_1(t))$ følgjer det av Feynman-Kàc, avsnitt 2.5 på side 10

$$C_t(t,Z_1(t)) + \frac{1}{2}C_{xx}(t,Z_1(t))Z_1^2(t)\sigma_Z^2 = 0. \tag{5.4}$$

Og vi får frå formel 5.1 og formel 5.3

$$\eta_t = C_x(t, Z_1(t)) \tag{5.5}$$

$$\phi_t = C(t, Z_1(t)) - \eta_t Z_1(t). \tag{5.6}$$

5.1 Exchange opsjon

Dersom vi no går ut frå at derivatet er ein exchange opsjon, som er ein opsjon på å bytte eit på førehand gitt antal ,K_1, av eit verdipapir, inn i eit på førehand gitt antal, K_2 av eit anna verdipapir. I dette tilfellet er verdipapira to nullkupong obligasjonar med forskjellege forfallsdatoar, $X = (K_1 P(T,T_1) - K_2 P(T,T_2))^+$. Denne kan, dersom $v(t,T_1)$ og $v(t,T_2)$ er deterministiske, prisast ved å bruke endring av numeraire, med T_1 forward mål som numeraire.

$$\begin{aligned}\pi_X(t,T) =& P(t,T_1)\,\mathbb{E}^0[(K_1 - K_2 Z_1(t))^+ \mid \mathcal{F}_t] \\ =& P(t,T_1)P^0(K_1 > K_2 Z_1(T)|F_t) - K_2 P(t,T_1)\,\mathbb{E}^0[Z_1(T)1_{\{K_1 > K_2 Z_1(T)\}} \mid \mathcal{F}_t] \\ =& P(t,T_1)\mathcal{N}(g(t,x)) - K_2 P(t,T_2)\mathcal{N}\big(g(t,x) - b(t,T_1,T_2)\big)\end{aligned}$$

Der

$$\begin{aligned} b^2(t,T_1,T_2) &= \int_t^T |v(s,T_2) - v(s,T_1)|^2 \,\mathrm{d}s \\ g(t,x) &= \frac{\ln \frac{K_1 P(t,T_1)}{K_2 P(t,T_2)} + \frac{1}{2} b^2(t,T_1,T_2)}{b(t,T_1,T_2)}\end{aligned}$$

Og vi får

$$\begin{aligned} C(t,x) =& \mathcal{N}(g(t,x)) - K_2 x \mathcal{N}\big(g(t,x) - b(t,T_1,T_2)\big) \\ C_x(t,x) =& \mathcal{N}'(g(t,x)) g_x(t,x) - K_2 \mathcal{N}\big(g(t,x) - b(t,T_1,T_2)\big) \\ & - K_2 x \mathcal{N}'\big(g(t,x) - b(t,T_1,T_2)\big) g_x(t,x).\end{aligned}$$

No kan vi vise at, avsnitt A.1 på side 69,

$$K_2 x \mathcal{N}'\big(g(t,x) - b(t,T_1,T_2)\big) g_x(t,x) = \mathcal{N}'(g(t,x)) g_x(t,x)$$

det gir antalet T_2-obligasjonar

$$\eta_t = C_x(t,x) = -K_2 \mathcal{N}\big(g(t,x) - b(t,T_1,T_2)\big) \tag{5.7}$$

og antalet T_1-obligasjonar

$$\phi_t = C(t, Z_1(t)) - \eta_t Z_1(t) = \mathcal{N}(g(t,x)) \tag{5.8}$$

5.1.1 Ho-Lee

Dersom vi spesifiserer rentedynamikken vert det mogeleg å finne $b^2(t,T_1,T_2)$. Vi går no ut frå at renta følger ein Ho-Lee modell, denne er spesifisert i definisjon 2.7.1 på side 14 som

$$\mathrm{d}r_t = \theta(t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t.$$

Denne modellen medfører følgjande forwarddynamikk, sjå avsnitt 2.7.3 på side 17.

$$\mathrm{d}f(t,T) = \sigma^2(T-t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t.$$

Vi veit at samanhengen mellom obligasjonsprisdynamikken og forwarddynamikken er $v(t,T) = -\int_t^T \sigma(s,T)\,\mathrm{d}s$. Her ser vi at $\sigma(t,T) = \sigma$, får då

$$v(t,T) = -\int_t^T \sigma\,\mathrm{d}s = -\sigma(T-t).$$

Her kan vi sjå at volatiliteten til ein T-obligasjon under denne modellen går mot 0 når tida t går mot T. Dette verkar intuitivt rett sidan usikkerheite vert mindre og mindre etterkvart som perioden fram til utbetaling vert kortare.

Ut frå dette kan vi finne $b^2(t,T_1,T_2)$ for Ho-Lee modellen.

$$b^2(t,T_1,T_2) = \sigma^2\int_t^{T_1}(T_2-T_1)^2\,\mathrm{d}s = \sigma^2(T_2-T_1)^2(T_1-t).$$

5.1.2 Hull-White

No går vi ut frå at renta følger ein Hull-White modell, definisjon 2.7.1 på side 14,

$$\mathrm{d}r_t = (\theta(t) - ar_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t.$$

Dette gir ein annan forwarddynamikk, sjå avsnitt 3.2 på side 25

$$\mathrm{d}f(t,T) = \sigma e^{-a(T-t)}S(t,T)\,\mathrm{d}t + \sigma e^{-a(T-t)}\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t.$$

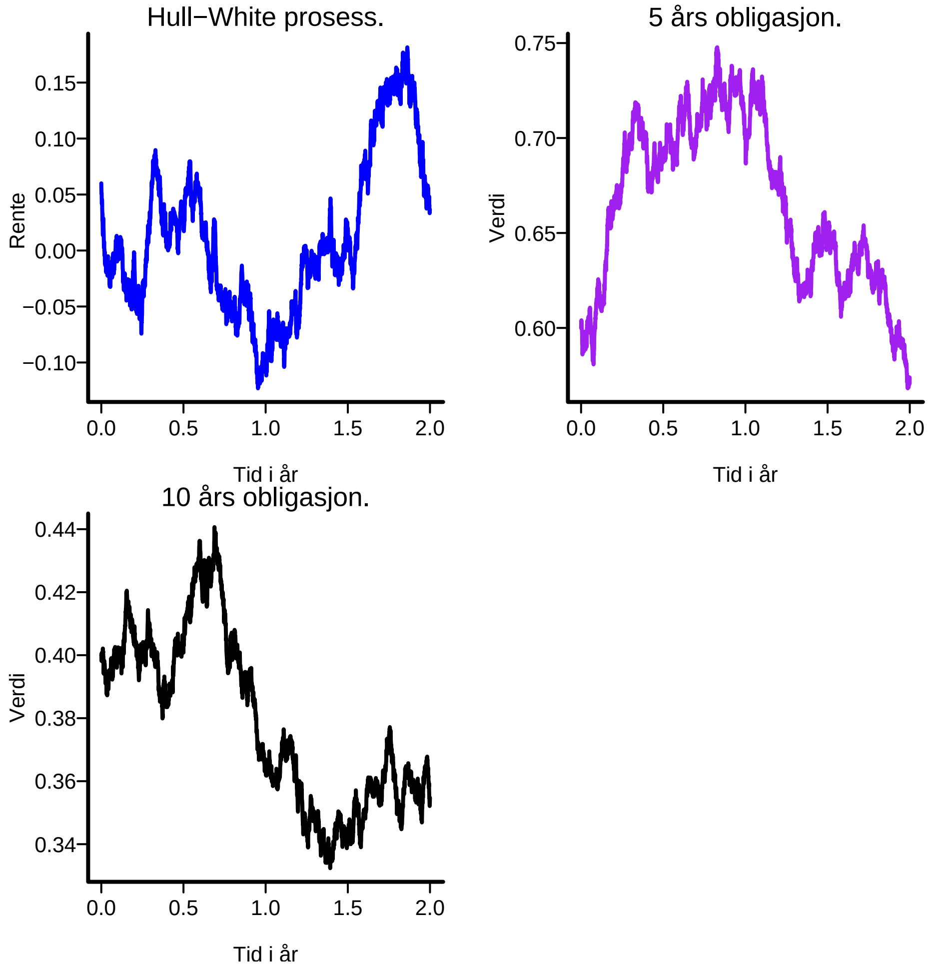
Dersom vi no bruker denne til å rekne ut volatiliteten til obligasjonane får vi,

$$v(t,T) = \sigma\int_t^T e^{a(T-s)}\,\mathrm{d}s = \frac{\sigma}{a}(1-e^{-a(T-t)}).$$

Og vi ser her og at volatiliteten går mot 0 når tida t går mot T.
No kan vi og finne $b^2(t,T_1,T_2)$ ved hjelp av det vi har, vi ser at dette blir eit meir komplisert uttrykk enn for Ho-Lee modellen,

$$\begin{aligned} b^2(t,T_1,T_2) =& \frac{\sigma^2}{a^2}\int_t^{T_1}(e^{-a(T_2-s)} - e^{-a(T_1-s)})^2\,\mathrm{d}s \\ =& \frac{\sigma^2}{2a^3}(e^{-aT_2} - e^{aT_1})^2(e^{2aT_1} - e^{2at}). \end{aligned}$$

5.1.3 Simulering av pris og replikerande portefølje for ein exhange opsjon



Figur 5.1: Simulering av renta og obligasjonsverdiar i ein Hull-White modell.

I figur 5.1 har eg simulert renteutviklinga og utviklinga i prisen på ein 5 års- og ein 10 års obligasjon, i ein Hull-White modell, dette over ein periode på to år. Programkoden er gjengitt i avsnitt B.1 på side 71. Eg har her gått ut frå at det er 7 timar per handledag, 5 dagar i veka og 50 veker i året, dette gir 3500 timar. I simuleringa har eg sett ein steglengd på ein time, slik at vi har 3500 punkt. Resten av parametera har eg sett som følger

– Tida til opsjonen går ut $T = 2$.

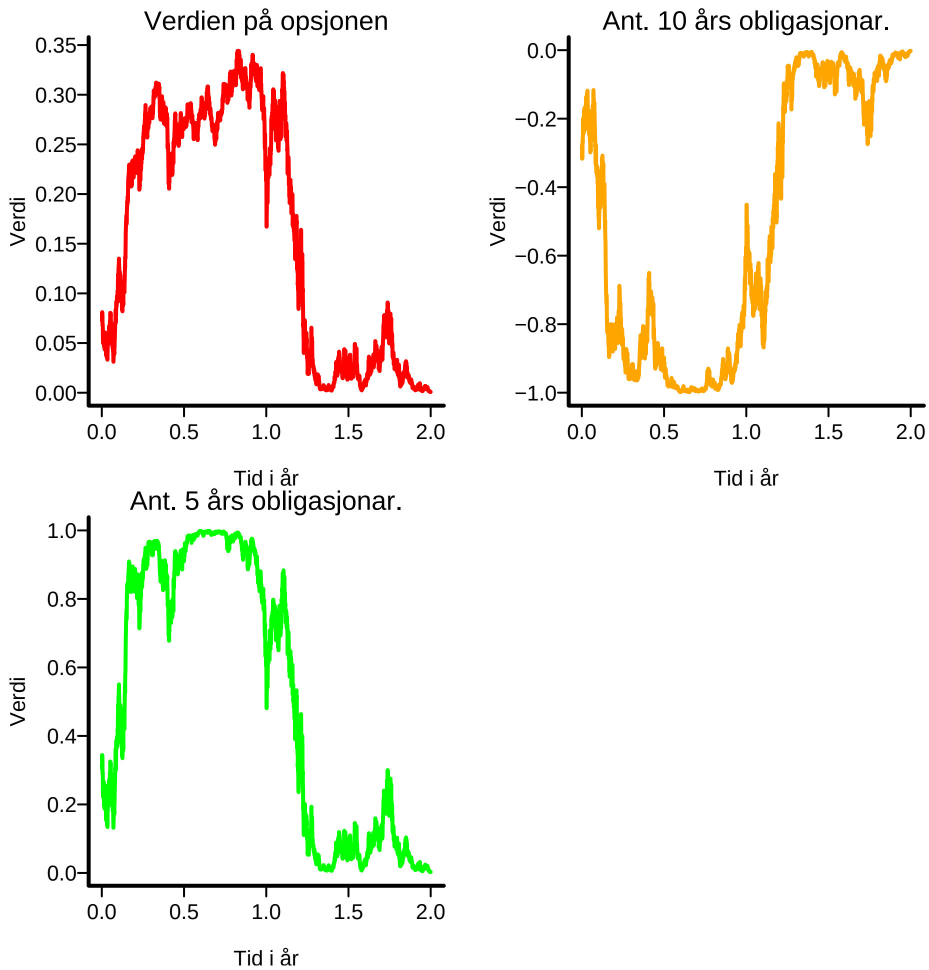
– Tida til den første obligasjonen går ut $T_1 = 5$.

– Tida til den andre obligasjonen går ut $T_2 = 10$.

– Volatiliteten $\sigma = 0{,}05$.

– Og renta vi varierer rundt $\theta_t = 0.06$.

Av desse har eg funne prisutviklinga på Exhange opsjonen og den fortløpande utviklinga i antalet av dei to obligasjonane i den replikerande porteføljga. Dette er vist i figur 5.2.



Figur 5.2: Simulering av pris og hedging av ein Exhange opsjon i ein Hull-White modell.

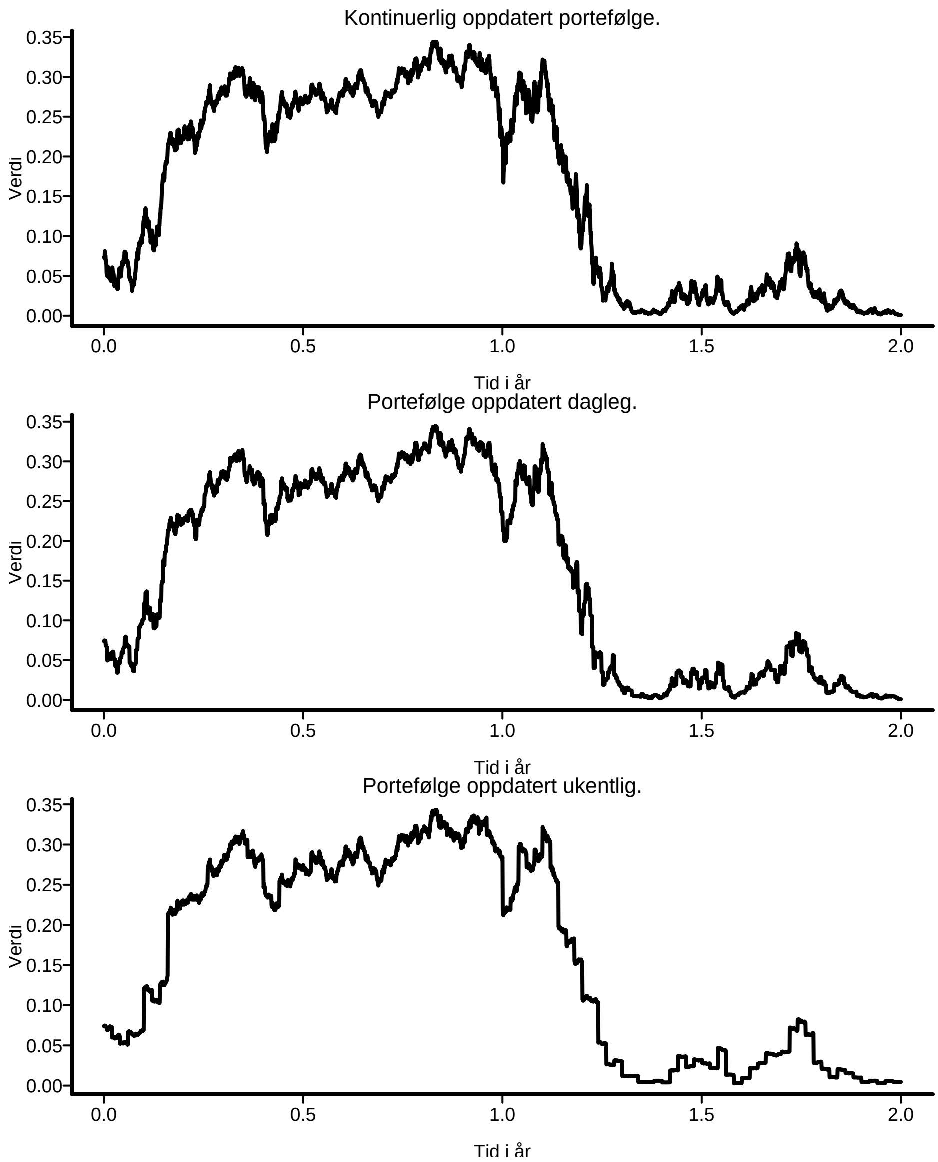
Diskret hedging.

Eit praktisk problem når det gjeld å replikera eit slikt krav, er at vi ikkje har mogelegheit til å endra på portefølgja vår kontinuerleg. I figur 5.2 på førre side kan ein sjå at antalet av dei to papira endrar seg heile tida. For å prøve å simulere dette lagar eg ein litt meir realistisk modell, der vi kan gå inn å endre på portefølgja ein gong per dag. Det vil seie at eg endrar portefølgja for kvar 7. time i simuleringa. Og ein annan modell, der eg går inn og endrar portefølgja ein gong per veke, det vil seie at eg endrar portefølgja kvar 35. time i simuleringa, figur 5.3 på neste side.

No ser vi, på figur 5.3 på neste side, at portefølgjene som ikkje vert kontinuerleg oppdatert, ikkje vil hedga kravet like godt som den opprinnelege med kontinuerleg oppdatering. Spesielt i byrjinga av perioden, der vi har store endringar i portefølgja vil den diskrete modellen fungere dårleg. Som ein kan sjå vil ein få store «hopp» i verdien av portefølgja, (dette kjem kanskje litt dårleg fram av figuren iallfall der vi har oppdatering kvar dag). For å få til desse hoppa må vi skyte inn eller ta ut kapital frå portefølgja slik at denne ikkje lenger er sjølvfinansierande. Lengre nede kjem eg inn på om det i det lange løp, vil vera behov for å skyte inn kapital eller om vi kanskje kan tena pengar på dette:) Mot slutten av perioden vil den diskrete portefølgja fungere tilfredstillande, sidan vi då har mindre omrokeringar mellom dei to obligasjonane, iallfall i dette tilfellet.

Frå dette kan vi sjå, at den arbitragefrie prisen vi finn gjennom å gå ut frå at eit slikt derivat kan hedgast med ein sjølvfinansierande portefølje, eigentleg er ein teoretisk minimumspris. I praksis vil det verte dyrare å hedga derivatet på grunn av praktiske begrensingar på kor ofte vi kan oppdatere portefølgja. Det kan visast at faste eller proporsjonale transaksjonskostnader, fører til at volatiliteten til opsjonen sitt underliggjande verdipapir går mot uendeleg dersom vi bruker kontinuerleg tid i denne samanhengen,Taleb (2004).

Som nemnt tidlegare har eg modellert diskret hedging, med ulik avstand mellom oppdateringane av portefølgja, ein gong per dag og ein gong per veke. I begge desse tilfella får eg at vi i gjennomsnitt må skyte inn kapital for å replikera opsjonen. Ved 100 gjennomkjøringar fekk eg eit gjennomsnittleg kapitalbehov på 0.075 på den dagleg oppdaterte portefølgja og 0.072 ved vekentleg oppdatering. Forskjellen mellom krava til kapital mellom desse er små, ein t-test, avsnitt B.1.2 på side 75, viste at det var ingen signifikant forskjell. Grunnen til dette kan vere at vi ikkje klarer å hedga skikkeleg i nokon av tilfella, og då har vi like stor sjanse til å få for lite/mykje kapital i begge tilfella. Derimot viste ein annan t-test, avsnitt B.1.2 på side 75, at kapitalbehovet i begge tilfella var større enn null, det vil seie at det kostar meir å replikera opsjonen enn den teoretiske prisen på denne.



Figur 5.3: Forskjell mellom diskret og kontinuerleg hedging.

5.2 Kjøpsopsjon

No vil eg finne hedgingstrategien for ein tilsvarande kjøpsopsjon, $Y = (P(T, T^*) - K)^+$ med utbetaling ved T. For å finne denne bruker eg same framgangsmåte som med exhange opsjonen i avsnitt 5.1 på side 32, men med den forskjellen at vi no bruker $P(t, T)$ som numeraire (forward measure). EG får då denne prisen

$$\begin{aligned}
&\pi_Y(t, T) = P(t, T)\,\mathbb{E}^0[(Z_1(t) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t] \\
&= P(t.T)\,\mathbb{E}^0[Z_1(T)1_{\{K<Z_1(T)\}}|F_t] + KP(t, T)P^0(K < Z_1(T) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= P(t, T^*)\mathcal{N}(f(t, x)) - KP(t, T)\mathcal{N}\big(f(t, x) - a(t, T_1, T_2)\big).
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Her er

$$\begin{aligned}
Z_1(t) &= \frac{P(t, T^*)}{P(t, T)} \\
f(t, x) &= \frac{\ln \frac{P(t,T^*)}{KP(t,T)} + \frac{1}{2}a^2(t, T, T^*)}{a(t, T, T^*)} \\
a^2(t, T, T^*) &= \int_t^T |v(t, T^*) - v(t, T)|^2\, \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Dette gir $C(t, x) = \frac{\pi_Y(t,T)}{P(t,T)}$ som

$$C(t, X) = x\mathcal{N}(f(t, x)) - K\mathcal{N}\big(f(t, x) - a(t, T_1, T_2)\big)$$

og den deriverte

$$C_x(t, x) = \mathcal{N}(f(t, x)) + x\mathcal{N}'(f(t, x))f_x(t, x) - K\mathcal{N}'\big(f(t, x) - a(t, T_1, T_2)\big)f_x(t, x).$$

Her kan vi og på same måte som i avsnitt A.1 på side 69 vise at

$$x\mathcal{N}'(f(t, x)) = K\mathcal{N}'\big(f(t, x) - a(t, T_1, T_2)\big)$$

Dette gir den hedgande porteføljga som

$$\eta_t = C_x(t, x) = \mathcal{N}(f(t, x))$$

og

$$\phi_t = C(t, Z_1(t)) - \eta_t Z_1(t) = -K\mathcal{N}\big(f(t, x) - a(t, T_1, T_2)\big).$$

No har vi funne den sjølvfinansierande portefølgja $V_t = \eta_t P(t, T^*) + \phi_t P(t, T)$ som hedgar kjøpsopsjonen Y. Her kan vi bruke akkurat same framgangsmåte som i avsnitt 5.1.1 på side 33 og avsnitt 5.1.2 på side 34 for å finne $a^2(t, T, T^*)$ for henholdsvis ein Ho-Lee og ein Hull-White modell.

5.3 Salgsopsjon

For å finne strategien for ein salsopsjon på det same underliggjande verdipapiret med same termindato, $Z = (K - P(T, T^*))^+$, bruker vi put-call pariteten, som er nærare forklart i avsnitt 7.1 på side 46. Ved hjelp av denne får vi følgjande pris for salsopsjonen dersom vi set inn frå formel 5.9 på førre side

$$\begin{aligned}\pi_Z(t, T) =& P(t, T^*)\mathcal{N}(f(t, x)) - KP(t, T)\mathcal{N}\big(f(t, x) \\ & - b(t, T_1, T_2)\big) + KP(t, T) - P(t, T^*) \\ =& KP(t, T)\mathcal{N}(-f(t, x) + a(t, T, T^*)) - P(t, T^*)\mathcal{N}(-f(t, x))\end{aligned}$$

Dette gir $C(t, x) = \frac{\pi_Z(t,T)}{P(t,T)}$ som

$$C(t, X) = K\mathcal{N}(-f(t, x) + a(t, T, T^*)) - x\mathcal{N}(-f(t, x))$$

og den deriverte

$$\begin{aligned}C_x(t, x) =& -K\mathcal{N}'(-f(t, x) + a(t, T, T^*)(f_x(t, x)) \\ & + x\mathcal{N}'(-f(t, x))(f_x(t, x)) - \mathcal{N}(-f(t, x)).\end{aligned}$$

Her kan vi og som i avsnitt A.1 på side 69 vise at

$$x\mathcal{N}'(-f(t, x)) = K\mathcal{N}'\big(-f(t, x) + a(t, T_1, T_2)\big).$$

Dette gir oss

$$\eta_t = C_x(t, x) = -\mathcal{N}\big(-f(t, x)\big) \tag{5.10}$$

og

$$\phi_t = C(t, Z_1(t)) - \eta_t Z_1(t) = K\mathcal{N}\big(-f(t, x) + a(t, T, T^*)\big). \tag{5.11}$$

No har vi funne at den sjølvfinansierande portefølgja $V_t = \eta_t P(t, T^*) + \phi_t P(t, T)$ hedgar salsopsjonen Z. Vi ser at for å hedga ein salsopsjon på ein obligasjon må vi alltid ha ein negativ andel av denne obligasjonen i portefølgja. For å hedga ein kjøpsopsjon må vi tilsvarande alltid ha ein positiv andel av den underliggjande obligasjonen. Dette stemmer med kva ein vil tru på førehand, då verdien på ein salsopsjon vil auke med ein lågare pris på obligasjonen, men motsett for kjøpsopsjonen.

6

Swap og caps

6.1 Hedging av ei swapkontrakt

Ein PFS (payer forward start) swap er ei kontrakt mellom to partar om å bytte LIBOR-renta i ei på førehand fastsett renta, avsnitt 2.8 på side 18. Matematisk kan dette forklarast ved at kontrakten ved tid $T_i, i = 1, \ldots, n$ betalar ut $Y_i = K\tau_i(L(T_{i-1}, T_i) - R)$, her er $L(T_{i-1}, T_i)$ Liborrenta frå T_{i-1} til T_i, definisjon 2.7.1 på side 13, R er ei fastsett rente, K er ein positiv konstant og τ_i er avstanden frå T_{i-1} til T_i.

Vi får ved bruk av T_i forward målet at verdien til denne kontrakta ved tida t er

$$\begin{aligned}
\pi_{Y_i}(t, T_i) &= \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)\, \mathbb{E}^0[Y_i \mid \mathcal{F}_t] \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)\, \mathbb{E}^0[K\tau_i(L(T_{i-1}, T_i) - R) \mid \mathcal{F}_t] \\
&= K \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)\, \mathbb{E}^0\Big[\Big(\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1 - \tau_i R\Big) \mid \mathcal{F}_t\Big] \\
&= K \sum_{i=1}^{n} (P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i) - \tau_i P(t, T_i) R).
\end{aligned}$$

Og når vi no summerer opp denne rekkja, står vi att med følgjande uttrykk for verdien av Y_i ved tida t,

$$\pi_{Y_i}(t,T_i) = KP(t,T_0) - KP(t,T_n) - KR\sum_{i=1}^{n}\tau_i P(t,T_i). \tag{6.1}$$

No ser vi ut av dette uttrykket at denne kontrakta kan hedgast ved å kjøpe K T_0-obligasjonar, shorte K T_n-obligasjonar og shorte $KR\tau_i$ T_i-obligasjonar. Vi ser og at dersom vi ønskjer at nettoinvesteringa ved tid t for den replikerande porteføljga skal vere 0 (kontrakta skal ha verdi 0 ved t), må vi oppfylle $R = \frac{P(t,T_0)-P(t,T_n)}{\sum_{i=1}^{n}\tau_i P(t,T_i)}$.

6.2 Caplet og cap i marknadsmodellen

6.2.1 Caplet

Vi har ein caplet, definert i avsnitt 2.8 på side 18. Denne er her gitt som $X_i = \tau_i(L(T_{i-1},T_i) - R_i)^+$, med utbetaling ved T_i, her er τ_i avstanden mellom tidene T_{i-1} og T_i, $L(T_{i-1},T_i)$ er Libor renta frå T_{i-1}, til T_i. R_i er ei på førehand fastsett renta. Vi går ut frå at $t \leq T_0 < T_1 < \ldots < T_n$.

Vi kan skrive Libor renta som ei forward renta, dvs $L(T_{i-1},T_i) = F(T_{i-1},T_{i-1},T_i)$, der forward dynamikken er antatt å følgje

$$\mathrm{d}F(t,T_{i-1},T_i) = F(t,T_{i-1},T_i)\sigma'(t,T_{i-1},T_i)\,\mathrm{d}W_t^{T_i}, \tag{6.2}$$

vi går ut frå at $\sigma'(t,T_{i-1},T_i)$ er deterministisk.

Ut frå dette kan det visast, Musiela og Rutkowski (2005), at prisen på ei slik kontrakt er gitt som

$$\pi_{X_i}(t,T_i) = \tau_i P(t,T_i)\big(F(t,T_{i-1},T_i)\mathcal{N}(d_{1,i}) - R_i\mathcal{N}(d_{2,i})\big) \tag{6.3}$$

der

$$\begin{aligned}
d_{1,i} &= \frac{\ln\Big(\frac{F(t,T_{i-1},T_i)}{R_i}\Big) + \frac{1}{2}b^2(t,T_{i-1}T_i)}{b(t,T_{i-1},T_i)},\\
d_{2,i} &= d_{1,i} - b(t,T_{i-1},T_i),\\
b^2(t,T_{i-1},T_i) &= \int_t^{T_{i-1}} |\sigma(s,T_{i-1},T_i)|^2\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

No tek vi utgangspunkt i forwardprisen, $C(t,T_i) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi_{X_i}(t,T_i)}{P(t,T_i)} = Z_i^C(t)$ på denne kontrakta. Frå formel 6.3 på førre side

$$C(t,T_i) = \tau_i F(t,T_{i-1},T_i)\mathcal{N}(d_{1,i}) - \tau_i R_i \mathcal{N}(d_{2,i}),$$

og bruker Itô's formel, teorem 2.4.2 på side 8 på denne

$$\begin{aligned} \mathrm{d}C(t,T_i) =& \tau_i \big(F(t,T_{i-1},T_i)\mathcal{N}'(d_{1,i})d'_{1,i} - R_i\mathcal{N}'(d_{2,i})d'_{2,i}\big)\,\mathrm{d}t \\ &+ \tau_i\mathcal{N}(d_{1,i})\,\mathrm{d}F(t,T_{i-1},T_i). \end{aligned}$$

På same måte som i avsnitt 5.1 på side 32 kan vi vise at

$$F(t,T_{i-1},T_i)\mathcal{N}'(d_{1,i})d'_{1,i} = R_i\mathcal{N}'(d_{2,i})d'_{2,i},$$

Dette gir då

$$\mathrm{d}C(t,T_i) = \tau_i\mathcal{N}(d_{1,i})\,\mathrm{d}F(t,T_{i-1},T_i). \tag{6.4}$$

Dersom vi no skal hedga denne kontrakta er det naturleg å ta utgangspunkt i at vi må ha med ein andel i ein forward swap med $R = 0$ og $K = 1$, dvs. $Y = \tau_i F(T_{i-1},T_{i-1},T_i)$ denne går over perioden $[T_{i-1},T_i]$. Antalet av dette papiret skriv eg som ψ^i, dynamikken vil vere

$$dG_t = \tau_i\psi_t^i\,\mathrm{d}F(t,T_{i-1},T_i). \tag{6.5}$$

Dersom vi skal ha formel 6.4 lik formel 6.5 må vi ha

$$\psi_t^i = \mathcal{N}(d_{1,i}).$$

No set vi η_t^i som antalet T_i-obligasjonar i portefølgja, og får

$$\eta_t^i = C(t,T_i) - \psi\tau_i F(t,T_{i-1},T_i) = \tau_i R_i\mathcal{N}(d_{2,i}). \tag{6.6}$$

Og portefølgja $V_t^i = \psi_t^i\tau_i F(t,T_{i-1},T_i) + \eta_t^i P(t,T_i)$ hedger då X_i. Viss vi ser tilbake til avsnitt 6.1 på side 42 ser vi at vi kan bruke obligasjonar for å hedga swapkontrakta. Dersom vi i formel 6.1 på førre side set $R = 0$ og $K = 1$ får vi at denne swapen kan hedgast med å kjøpe ein T_{i-1}-obligasjon og shorte ein T_i-obligasjon. Dette gir at vi i spotmarknaden kan hedga dette kravet ved å bruke følgjande sjølvfinansierande portefølje

$$\begin{aligned} V_t^i &= \psi_t^i(P(t,T_{i-1}) - P(t,T_i)) + \eta_t^i P(t,T_i) \\ &= \psi_t^i P(t,T_{i-1}) + (\eta_t^i - \psi_t^i)P(t,T_i). \end{aligned} \tag{6.7}$$

6.2.2 Cap

Ein cap er eit verdipapir som betaler ut X_i ved $T_i, i = 1, \dots, n$, avsnitt 2.8 på side 18. Den totale utbetalinga til ein slik cap kan vi skrive som $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Her ser vi at dette berre er ein sum av n capletar med utløpsdato ved T_i, der $i = 1, \dots, n$.

Då forstår vi at vi kan bruke hedgingstrategien vi fann for capletar til å hedga dette derivatet og. Sidan capen berre var summen av fleire capletar vil ein replikere denne ved å replikere alle capletane denne består av. Det vil seie at ein cap kan hedgast med den sjølvfinansierande porteføljga

$$V_t = \sum_{i=1}^{n} V_t^i,$$

der V_t^i er gitt av formel 6.7.

7 Delta hedging og paritetar

Som tidlegare nemnt er det i praksis ikkje mogeleg å få til den kontinuerlege rebalanseringa av porteføljga som er nødvendig for å få til Black-Scholes hedginga eg har gått gjennom. Det vi har behov for er ei replikerande portefølje som vi ikkje treng rebalansera, iallfall ikkje kontinuerleg. For å få det til kan det vera nyttig å bruke derivat, i tillegg til dei underliggjande papira og ei risikofri investering.

7.1 Paritetar

Ein av dei enklaste og mest kjende paritetane er put-call pariteten. Denne gir tilhøve i pris mellom ein europeisk salsopsjon og ein tilsvarande europeisk kjøpsopsjon. For å finne denne tar vi utgangspunkt i ei portefølje som består av ein kjøpsopsjon (call), $\chi = (P(T,T^*) - K)^+$, og ein kort posisjon i ein salsopsjon (put), $\Upsilon = (K - P(T,T^*))^+$. Utbetalinga til denne porteføljga ved utløpstida T vil vere gitt som

$$\chi - \Upsilon = (P(T,T^*) - K)^+ - (K - P(T,T^*)^+ = P(T,T^*) - K.$$

Viss vi «flytter» denne prisen frå tida T til t får vi

$$\pi_\chi(t,T) - \pi_\Upsilon(t,T) = P(t,T^*) - KP(t,T).$$

Dersom vi stokkar litt om på dette uttrykket, får vi forholdet mellom prisen på ein europeisk salsopsjon og prisen på ein europeisk kjøpsopsjon på den forma som til vanleg vert kalla put-call pariteten.

Teorem 7.1.1: Put-Call pariteten

$$\pi_{\chi}(t,T) = \pi_{Y}(t,T) + P(t,T^*) - KP(t,T)$$

No ser vi lett at vi i praksis kan bruke teorem 7.1.1 for å hedga ein call opsjon, eventuelt snu litt på denne for å kunne hedga ein tilsvarande put opsjon. Dette forholdet fortel oss at dersom vi har ei portefølje som er samansett av ein put opsjon, ein andel i opsjonen sitt underliggjande verdipapir og K T-obligasjonar så vil denne replikera callopsjonen. Her må sjølvsagt call- og putopsjonen ha same underliggjande papir, same strikepris og same utløpsdato. Vi ser at dette er ein enkel hedgetaktikk som det ikkje trens store resursar til å finne ut av, denne taktikken vert då og brukt i stor utstrekning i derivatmarknaden for å utnytte arbitragemogelegheiter, Brown (2006).

Mange andre opsjonstypar kan og hedgast på tilsvarande måte ved bruk av paritetar, dette gir eg her eit døme ved å hedga ei såkalla straddle kontrakt.

Eksempel 7.1.2: Straddlekontrakt

Ei straddlekontrakt er ei kontrakt som gir utbetaling både når det underliggjande papiret auke verdien sin, og når det blir billigare, eit typisk derivat ein kan sikre seg mot større volatilitet i marknaden med. Matematisk er denne kontrakten gitt som følgjer

$$\chi = \begin{cases} K - P(T,T^*) & \text{viss } 0 < P(T,T^*) \leq K, \\ P(T,T^*) - K & \text{viss } K < P(T,T^*). \end{cases}$$

Denne kan vi skriva som

$$\chi = (K - P(T,T^*))1_{\{P(T,T^*)\leq K\}} + (P(T,T^*) - K)1_{\{K<P(T,T^*)\}}.$$

Dette kjenner vi igjen som ein europeisk put- og ein callopsjon på ein T^*-obligasjon med strikepris K. Slik at viss vi no diskonterer verdien av dette til tida t får vi den hedgande porteføljga

$$\pi_{\chi}(t,T) = \pi_{P}(t,T) + \pi_{C}(t,T).$$

Eventuelt ved å bruke put-call pariteten på denne

$$\pi_\chi(t,T) = 2\pi_C(t,T) + KP(t,T) - P(t,T^*).$$

I kontinuerleg tid kan denne sjølvsagt hedgast på vanleg måte ved å bruke hedgingstrategien for ein put- og callopsjon.

7.2 «Grekarane»

For å laga ei portefølje som skal replikera eit krav på eit underliggjande papir med prisprosess S_t er det viktig å vita kor sensitiv verdien på denne porteføljga, $\pi(t,s)$, er i forhold til to variablar, Björk (2004).

- Endringar i prisen på det underliggjande papiret.
- Endringar i modellparametera.

I det første tilfellet over vil vi berre få eit mål på kor mykje risiko porteføljga er utsett for i forhold til endringar i prisen på det underliggjande papiret. I det andre tilfellet vil vi vite kor store utslag feil i modellparametera gir for resultata.

Vi definerer no følgjande symbol.

Definisjon 7.2.1

$$\Delta = \frac{\partial \pi}{\partial s}, \qquad \Gamma = \frac{\partial^2 \pi}{\partial s^2},$$
$$\Theta = \frac{\partial \pi}{\partial t}, \qquad \rho = \frac{\partial \pi}{\partial r},$$
$$\mathcal{V} = \frac{\partial \pi}{\partial \sigma}.$$

Vi ser her at det er ein viktig forskjell mellom dei tre første «Grekarane» og dei to siste. Dei første tre fortel kor sensitiv modellen er i forhold til endringar innad i modellen desse vert kalla lokale grekarar, medan dei to siste seie kva som skjer dersom vi endrar på modellen, desse kallar vi globale grekarar, Norberg (2006).

Dersom vi no bruker den europeiske kjøpsopsjonen eg har prisa i formel 5.9 på side 39 som døme, kan vi finne dei deriverte i definisjonen over. Dette gir følgjande, der vi for prisprosessen S_t no har $P(t,T)$.

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \mathcal{N}(f(t,x)) \\
\Gamma &= \frac{\varphi(f(t,x))}{s\sigma\sqrt{T-t}}, \\
\Theta &= -\frac{s\varphi(f(t,x))\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}\mathcal{N}(f(t,x) - a(t,T_1,T_2)), \\
\rho &= K(T-t)e^{-r(T-t)}\mathcal{N}(f(t,x) - a(t,T_1,T_2)) \\
\mathcal{V} &= s\varphi(f(t,x))\sqrt{T-t}.
\end{aligned} \tag{7.1}
$$

Her er φ tettleiken til normalfordelinga, og

$$
\begin{aligned}
f(t,x) &= \frac{\ln \frac{P(t,T^*)}{KP(t,T)} + \frac{1}{2}a^2(t,T,T^*)}{a(t,T,T^*)} \\
a^2(t,T,T^*) &= \int_t^T |v(t,T^*) - v(t,T)|^2 \, \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

I figur 7.1 på neste side ser vi korleis Γ og Δ og dei andre grekarane til denne opsjonen utviklar seg i forhold til prisen på den underliggjande obligasjonen.

7.2.1 Delta nøytral

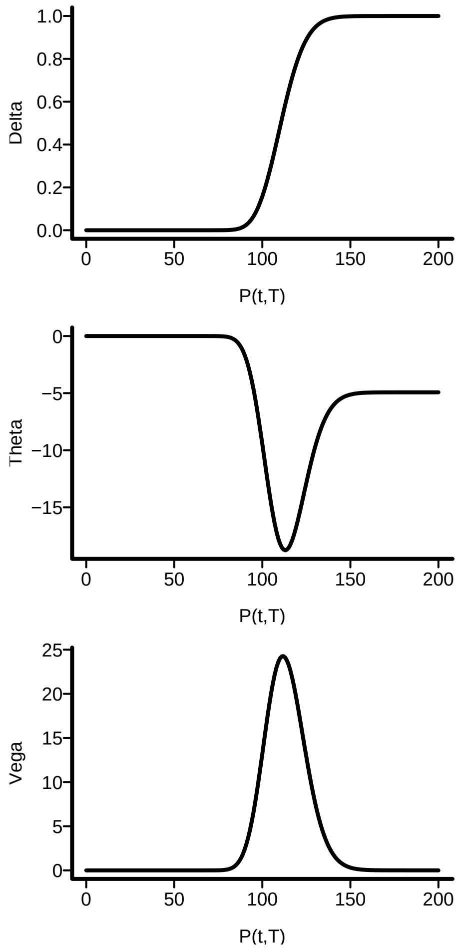
Det vi no er interessert i er å finne ei portefølje som hedgar kravet vårt OG er delta nøytral, det vil seie at $\Delta = 0$. Ein måte å oppnå dette på er å leggje eit derivat til porteføljga, dette kan enten vera ein opsjon på det underliggjande papiret eller sjølve papiret. Begge desse vil sjølvsagt vera korrelert med den underliggjande prisen og vi skal derfor kunne balansere porteføljga slik at den vert delta nøytral.

No tek vi utgangspunkt i ei gitt portefølje med prisfunksjon $\pi(t,s)$, og prøver å gjera denne delta nøytral. Vi ønskjer å bruka eit derivat som og er avhengig av S_t, med prisfunksjon definert som $\pi_D(t,s)$, for å gjera denne porteføljga immun mot små endringar i S_t. Dette oppnår vi ved å leggje eit antal, x, av dette derivatet til den opphavlege porteføljga. Verdien V av den justerte porteføljga vert då

$$
V(t,s) = \pi(t,s) + x\pi_D(t,s).
$$

For å gjera denne porteføljga delta nøytral må vi velje x slik at $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \pi}{\partial s} = 0$, som gir uttrykket

$$
\frac{\partial \pi}{\partial s} + x\frac{\partial \pi_D}{\partial s} = 0.
$$



Figur 7.1: Grekarane for ein europeisk kjøpsopsjon med $K = 100$ og $T = 3$ ved tida $t = 2$.

Som har løysinga

$$x = -\frac{\frac{\partial \pi}{\partial s}}{\frac{\partial \pi_D}{\partial s}}.$$

Vi kan heller ikkje no sette oss ned å vente til opsjonen går ut, eit problem er at tida t endrar seg, og i tillegg prisen på det underliggjande papiret. Dette gir oss etter ei stund ein annan delta, slik at portefølgja vår ikkje lenger er delta nøytral. Det som vert gjort i praksis er å bruke ein **diskret rebalansert delta hedga**, Björk (2004), der vi med jamne mellomrom går inn og oppdaterer portefølgja, til dømes kvar dag. Her og vil vi treffe på same dilemmaet som tidlegare, oftare oppdatering av portefølgja vil gi ein betre hedging, men høgare transaksjonskostnadar.

7.2.2 Gamma nøytral

Eit mål på kor sensitiv Δ er i forhold til prisen er sjølvsagt den deriverte av denne med omsyn på prisen, dette ser vi tilsvarar Γ. Då ser vi at ei portefølje med ein høg gamma vil krevja oftare oppdatering enn ei med lav gamma. Vi føretrekkjer å ha ei portefølje som i tillegg til å vera delta nøytral, òg er gamma nøytral. Vi ser at for det underliggjande papiret er $\Delta = 1$ og $\Gamma = 0$, dette er trivielt. Ser no at sidan gamma til det underliggjande papiret er null kan vi ikkje bruke dette til å endra gammaen til porteføljga.

Ut frå desse eigenskapane forstår vi at for å gjera porteføljga delta- og gamma nøytral må vi først gjera den gamma nøytral ved hjelp av eit derivat, deretter legge til det underliggjande papiret til den vert delta nøytral. Dersom vi gjer det i motsett rekkjefølgje vil vi «øydeleggje» delta nøytraliteten når vi legg til derivatet. Vi går no fram på følgjande måte.

$$V(t,s) = \pi(t,s) + x_D \pi_D(t,s) + x_S s,$$

her er x_D antalet av derivatet og x_S antalet av det underliggjande papiret. Dette gir oss følgjande likningssystem.

$$\begin{aligned} \Delta_\pi + x_D \Delta_{\pi_D} + x_S &= 0, \\ \Gamma_\pi + x_D \Gamma_{\pi_D} &= 0. \end{aligned}$$

Som har løysing

$$\begin{aligned} x_D &= -\frac{\Gamma_\pi}{\Gamma_{\pi_D}}, \\ x_S &= \frac{\Delta_{\pi_D} \Gamma_\pi}{\Gamma_{\pi_D}} - \Delta_\pi. \end{aligned}$$

Dersom vi hugsar tilbake til Feynman-Kac, veit vi at den er gitt som

$$\frac{\partial F}{\partial t} + rs\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - rF = 0.$$

Dersom vi bruker denne her får vi eit forhold mellom grekarane som må vera oppfylt

$$\Theta + rs\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \Gamma = r\pi.$$

Dette gir oss også at dersom porteføljga er både delta- og gamma nøytral vil avkastinga på denne vera lik den korte marknadsrenta r,

$$\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \pi}{\partial t} = r\pi.$$

Eksempel 7.2.2: Put-Call pariteten

Viss vi tar utgangspunkt i at vi har ei portefølje V som replikerar ein kjøpsopsjon, χ, får vi at denne har delta og gamma som gitt i formel 7.1 på side 49. Denne porteføljga ønskjer vi å gjere delta og gamma nøytral. Dette vil vi prøve å få til ved å legge til andelar av ein kjøpsopsjon, ψ, med følgjande delta og gamma

$$\Delta = \mathcal{N}(f(t,x)) - 1,$$
$$\Gamma = \frac{\varphi(f(t,x))}{s\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Og andelar av det underliggjande papiret, i dette tilfellet ein T^*-obligasjon, denne har sjølvsagt, $\Delta = 1$ og $\Gamma = 0$.

Vi ser no at dersom vi trekkjer frå ein andel av salsopsjonen i porteføljga har vi klart å få $\Gamma = 0$ og står igjen med $\Delta = 1$. Denne kan vi få lik null dersom vi trekkjer frå ein andel av T-obligasjonen. Då får vi at porteføljga V_1, med verdi

$$V_1(t) = \pi_\chi(t,T) - \pi_\psi(t,T) - P(t,T^*)$$

er delta- og gamma nøytral. Sidan vi allereie har vist at ei slik portefølje må ha avkastning lik den korte marknadsrenta, det vil seie at vi kan skriva

$$\frac{\partial V_1(t)}{\partial t} = r_t V_1(t).$$

Og dette gir følgjande differensiallikning med løysing

$$V_1'(t) - r_t V_1(t) = 0 \Rightarrow V_1(t) = Ce^{-\int_t^T r_s \,\mathrm{d}s}.$$

Grensebetinginga er her ved $t = T$ og er gitt som

$$\begin{aligned} V_1(T) &= \chi - \psi - P(T,T^*) \\ &= (P(T,T^*) - K)^+ - (K - P(T,T^*))^+ - P(T,T^*) \\ &= P(T,T^*) - K - P(T,T^*) \\ &= -K. \end{aligned}$$

Då får vi

$$V_1(T) = C = -K,$$

som gir

$$V_1(T) = -Ke^{-\int_t^T r_s \, \mathrm{d}s} = -KP(t,T).$$

Dette gir

$$-KP(t,T) = \pi_\chi(t,T) - \pi_\psi(t,T) - P(t,T^*).$$

Dersom vi skriv denne litt om står vi igjen med put-call pariteten

$$\pi_\chi(t,T) = \pi_\psi(t,T) + P(t,T^*) - KP(t,T).$$

Del III

Hedging og prising med kredittrisiko

8
Introduksjon til kredittrisiko

Sjølv om obligasjonar i utgangspunktet vert sett på som ei sikker investering er innehavaren av obligasjonen i mange tilfelle ikkje garantert å få heile utbetalinga han er lova. Dette kan skje dersom obligasjonsutstedaren ikkje greier å innfri forpliktingane sine. Denne risikoen for insolvens hos utstedar varierer mellom ulike obligasjonsutstedarar. Sjølvsagt har vi forskjellar i kredittverdigheit blant private firma. Dei fleste ville nok kravd ein høgare avkastning (yield) på eit lån til Altinex i forhold til Statoil. Heller ikkje alle statsobligasjonar er like sikre. Sjølv om ikkje land kan gå teknisk konkurs er dei ikkje alltid like gode betalarar. Dette fører til at det vert dyrare for fattige land å låna pengar i marknaden, sidan investorar ser på det som ein meir risikabel investering enn å kjøpe til dømes Amerikanske statsobligasjonar.

Blant obligasjonar utstedt av private selskap, vil vi på grunn av risikoforskjellen, ha ein betydeleg forskjell i avkastning (yield spread) mellom dei beste (Aaa rating) og junk-obligasjonar, som er dei mest utsette. I 8.1 ser vi eit eksempel på denne forskjellen i yield, definisjon 2.6.3 på side 13. Vi ser og at i tillegg til å vere avhengig av risiko er yielden òg avhengig av løpetid. I avsnitt 9 på side 57 ser eg på Mertons modell for å finne denne forskjellen, som på ein T-obligasjon, sjølvsagt kjem fram gjennom ein lågare pris. Ved å bruke denne metoden finn eg òg ei portefølje som hedgar ein slik obligasjon, denne vil bestå av sikre obligasjonar og andelar av selskapet sin verdi.

Løpetid	Klassifisering	Spread	Standardavik	Tid til innløysing
Short	Aaa	0.67	0.083	3.8
	Aa	0.69	0.083	4.0
	A	0.93	0.107	4.2
	Baa	1.42	0.184	4.4
Medium	Aaa	0.77	0.102	10.1
	Aa	0.71	0.084	9.2
	A	1.01	0.106	9.4
	Baa	1.47	0.153	9.1
Long	Aaa	0.79	0.088	23.9
	Aa	0.91	0.97	21.3
	A	1.18	0.125	21.7
	Baa	1.84	0.177	21.2

Tabell 8.1: Spread for obligasjonar med forskjelleg løpetid og klassifisering. Ammann (2002)

Andre derivat som til dømes opsjonar, kan og vera utsett for konkursrisiko hos utstedar. I avsnitt 10 på side 60, bruker eg ein European call option som er utsett for motpartrisiko som eksempel, og visar korleis ein kan finne ein hedgingstrategi for denne. Her vil den hedgande porteføljga bestå av papira du treng for å hedga ein risikofri opsjon, og i tillegg andelar av verdien på selskapet som har utstedt opsjonen.

9
Mertons modell

I dette kapittelet vil eg bruke Mertons modell til å prise ein T-obligasjon som er utsett for kredittrisiko. I denne modellen går vi ut frå at alle innehavarar av obligasjonar har same rett til utbetaling ved tida T, slik at dei må dele likt det som er igjen av pengar i selskapet etter ein eventuell konkurs.

I ein slik situasjon kan verdien av summen av den totale utbetalinga frå eit selskap til innehavarane av alle obligasjonar utstedt av dette selskapet skrivast som

$$X = \min(A_T, K) = K - (K - A_T)^+ = K(1 - Y_p),$$

der

$$Y_p = (1 - \frac{A_T}{K})^+.$$

Her er A_t verdien av selskapet ved tid t, og K er det selskapet har forplikta seg til å betale obligasjonseigarane ved tid T. Prisen på X ved tid t, vil sjølvsagt vere gitt som

$$\pi_X(t, T) = K(P(t, T) - \pi_{Y_p}(t, T)).$$

Og verdien av ein obligasjon blir, sidan kvar av desse skal betala ut 1 ved tida T,

$$P^d(t,T) = \frac{1}{K}\pi_X(t,T) = P(t,T) - \pi_{Y_p}(t,T).$$

Her ser ein at verdien av ein risikabel obligasjon er verdien av ein sikker obligasjon, minus verdien av ein salsopsjon på ein K-del av selskapet sin verdi. Dette verkar fornuftig sidan eigarane av selskapet kan «selje» selskapet til obligasjonseigarane for K, ved tida T, dersom $V_T < K$. No ser vi at ein slik risikabel obligasjon kan hedgast ved å kjøpe ein risikofri obligasjon og selje ein salsopsjon på ein K-del av verdien av firmaet, denne opsjonen må ha strikeprice 1. Vi veit at ein salsopsjon kan hedgast ved å bruke ei sjølvfinansierande portefølje som består av det underliggjande papiret og T-obligasjonar. Denne skriv eg som

$$V_t = h_1 A_t + h_2 P(t,T).$$

Vi går no ut frå at A_t er mogeleg å omsetje i marknaden og at

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A_t &= r_t A_t\,\mathrm{d}t + A_t\sigma'(t)\,\mathrm{d}W_t,\\
\mathrm{d}P(t,T) &= r_t P(t,T)\,\mathrm{d}t + P(t,T)v'(t,T)\,\mathrm{d}W_t,
\end{aligned}$$

med $o(t)$ og $v(t,T)$ deterministisk. Dersom vi bruker same framgangsmåte som i avsnitt 5 på side 31, får vi at prisen på salsopsjonen Y_p er gitt som

$$\pi_{Y_p}(t,T) = P(t,T)\mathcal{N}\big(g(t,x)\big) - \frac{A_t}{K}\mathcal{N}\big(g(t,x) - a(t,T)\big), \tag{9.1}$$

der

$$\begin{aligned}
g(t,x) &= \frac{\ln\frac{KP(t,T)}{A_t} - \frac{1}{2}a^2(t,T)}{a(t,T)},\\
a^2(t,T) &= \int_t^T |v(s,T) - \sigma(s)|^2\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

9.1 Hedgingstrategi for ein risikabel obligasjon

For å finne porteføljen $V_t$som hedger Y_p, bruker vi same framgangsmåte som i avsnitt 5.1 på side 32, dette gir den replikerande porteføljga $V_t = h_1 A_t + h_2 P(t,T)$ med

$$h_1 = -\frac{1}{K}\mathcal{N}\big(g(t,x) - a(t,T)\big), \tag{9.2}$$

$$h_2 = \mathcal{N}\big(g(t,x)\big).. \tag{9.3}$$

For å hedga den risikable obligasjonen må vi ha ei ny portefølje $V_t' = P(t,T) - V_t$. Denne finn vi ved å bruke formel 9.2 på førre side og formel 9.3 på førre side og sette inn for V_t,

$$\begin{aligned} V_t' &= P(t,T) + \frac{A_t}{K}\mathcal{N}\big(g(t,x) - a(t,T)\big) - \mathcal{N}\big(g(t,x)\big)P(t,T) \\ &= P(t,T)\mathcal{N}\big(-g(t,x)\big) + \frac{A_t}{K}\mathcal{N}\big(g(t,x) - a(t,T)\big). \end{aligned}$$

No ser vi at vi kan hedga ein risikabel T-obligasjon med $\mathcal{N}(-g(t,x))$ sikre T-obligasjonar og $\frac{1}{K}\mathcal{N}\big(g(t,x) - a(t,T)\big)$ andelar av den totale verdien av bedrifta.

9.2 Hedgingstrategi for kreditderivat

kreditderivat er derivat som er skrive på rein kredittrisiko, det tyder at utbetalinga berre er avhengig av kredittrisiko, ikkje andre variablar som renta. Eit døme på dette er gjeldsforsikring som er forklart under, men det finst mange andre, eg kan nemne mellom anna spread opsjonar og Total-Return swaps, Duffie og Singleton (2003). Typisk vert desse brukt av finansinstitusjonar som, til dømes, bankar, for å flytte risikoen i forhold til firma som ikkje klarer å innfri gjelda si, over på andre som er meir villige til å ta denne risikoen.

9.2.1 Gjeldsforsikring

Den enklaste forma for kreditderivat er ei gjeldsforsikring, ei slik forsikring garanterer at innehavaren av denne kan oppfylle sine forpliktingar. For å finne prisen på ei slik bruker vi at ein forsikra obligasjon vert rekna som sikker, og derfor vil ha same pris som ein sikker obligasjon. Dette gir saman med formel 9.1 på førre side, prisen på gjeldsforsikringa som forskjellen mellom prisen på ein sikker og ein usikker obligasjon,

$$\begin{aligned} G(t,T) &= P(t,T) - P^d(t,T) = P(t,T) - P(t,T) + \pi_{Y_P}(t,T) = \pi_{Y_P}(t,T) \\ &= P(t,T)\mathcal{N}(g(t,x)) - \frac{A_t}{K}\mathcal{N}(g(t,x) - a(t,T)). \end{aligned}$$

Og denne vil som forklart tidlegare hedgast med $V_t = h_1 V_t + h_2 P(t,T)$, der h_1 og h_2 er gitt i avsnitt 9.1 på førre side.

10 Hedging med motpartrisiko

I dette kapittelet går eg vidare til å prise eit derivat, som er utsett for kredittrisiko, og deretter finne porteføljga som hedger dette kravet.

Vi lar Y^0 vere ein European call option på ein T^*-obligasjon, $Y^0 = (P(T,T^*) - K)^+$, og går ut frå at det er fare for insolvens hos motparten; det vil seie at det er ein sjanse for at han ikkje kan betale ut alt han er skyldig ved T. La A_t vere verdien av motparten, inkludert gjeld, la D vera ein kritisk mengde slik at viss $A_T < D$, vil berre ein del av den totale gjelda verte betalt, det er naturleg å tenke på D som motpartens totale gjeld.

Dersom vi går ut frå at alle debitorane har lik prioritet kan vi skriva den verdien av Y^0 som

$$Y = (P(T,T^*) - K)^+(1_{\{A_T \geq D\}} + \delta_T 1_{\{A_T < D\}}).$$

Vi går ut frå at $\delta_T = \frac{A_T}{D}$, då får vi

$$Y = (P(T,T^*) - K)^+\Big(1_{\{A_T \geq D\}} + \frac{A_T}{D} 1_{\{A_T < D\}}\Big).$$

Det ser ut som Y kan hedgast med ei sjølvfinansierande portefølje som består av T- og T^*-obligasjonar og i tillegg verdien av bedrifta, A_T, $V_t = h_0(t)A_t + h_1(t)P(t,T^*) + h_2(t)P(t,T)$, for å finne denne må vi først og fremst prise kravet.

10.1 Prising av risikabel ECO

For å prise dette kravet går vi ut frå at

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A_t &= r_t A_t \,\mathrm{d}t + A_t \sigma'(t) \,\mathrm{d}W_t \\ \mathrm{d}P(t,T) &= r_t P(t,T) \,\mathrm{d}t + P(t,T) v'(t,T) \,\mathrm{d}W_t \\ \mathrm{d}P(t,T^*) &= r_t P(t,T^*) \,\mathrm{d}t + P(t,T^*) v'(t,T^*) \,\mathrm{d}W_t. \end{aligned}$$

For å finne prisen bruker vi no $P(t,T)$ som numeraire (forward measure)

$$\pi_Y(t,T) = P(t,T)\,\mathbb{E}^T\left[(Z_T^P - K)^+ \left(1_{\{Z_T^V \geq D\}} + \frac{Z_T^V}{D} 1_{\{Z_T^V < D\}}\right) \mid \mathcal{F}_t\right]$$

Her er

$$\begin{aligned} Z_t^P &= \frac{P(t,T^*)}{P(t,T)}, \\ Z_t^A &= \frac{A_t}{P(t,T)}. \end{aligned}$$

Og vi har

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Z_t^P &= Z_t^P \sigma_P'(t,T) \,\mathrm{d}W_t^T \\ \mathrm{d}Z_t^A &= Z_t^A \sigma_A'(t,T) \,\mathrm{d}W_t^T \end{aligned}$$

med

$$\begin{aligned} \sigma_P(t,T) &= v(t,T^*) - v(t,T) \\ \sigma_A(t,T) &= \sigma(t) - v(t,T). \end{aligned}$$

Vi går ut frå at $\sigma(t)$, $v(t,T^*)$ og $v(t,T)$ er avgrensa og deterministiske, det medfører at Z_t^P og Z_t^A er lognormalfordelt. Har då

$$\begin{bmatrix} Z_1^T \\ \\ Z_2^T \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\log Z_T^P - \log Z_t^P + \frac{1}{2} a_P^2(t,T)}{a_P(t,T)} \\ \frac{\log Z_T^A - \log Z_t^A + \frac{1}{2} a_A^2(t,T)}{a_A(t,T)} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}_2(0,1,\rho(t,T)). \tag{10.1}$$

Der $U \sim \mathcal{N}_2(0,1,\rho)$ betyr ei binormalfordeling, med forventing 0 og kovariansmatrise,

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Var}(U_1) & \mathrm{Cov}(U_1,U_2) \\ \mathrm{Cov}(U_1,U_2) & \mathrm{Var}(U_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}.$$

Her er

$$
\begin{aligned}
\rho(t,T) &= \frac{\phi(t,T)}{a_P(t,T)a_A(t,T)} \\
a_P^2(t,T) &= \int_t^T |\sigma_P(s,T)|^2\,\mathrm{d}s \\
a_A^2(t,T) &= \int_t^T |\sigma_A(s,T)|^2\,\mathrm{d}s \\
\phi(t,T) &= \int_t^T \sigma_P'(s,T)\sigma_A(s,T)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

Dersom vi no skriv Y som

$$
\begin{aligned}
Y =& Z_T^P 1_{\{Z_T^P>K,Z_T^A>D\}} - K1_{\{Z_T^P>K,Z_T^A>D\}} + \frac{Z_T^P Z_T^A}{D} 1_{\{Z_T^P>K,Z_T^A\geq D\}} \\
&- \frac{KZ_T^A}{D} 1_{\{Z_T^P>K,Z_T^A\geq D\}},
\end{aligned}
$$

og bruker denne i lag med formel 10.1 på førre side får vi etter ein del rekning, vist i Paulsen (2005), at prisen på Y ved tida t er

$$
\begin{aligned}
\pi_Y(t,T) =& P(t,T^*)\mathcal{N}_2\big(b(t,Z_t^P), b(t,Z_t^A), \rho(t,T)\big) \\
&- P(t,T)K\mathcal{N}_2\big(c(t,Z_t^P), c(t,Z_t^A), \rho(t,T)\big) \\
&+ \frac{P(t,T^*)A_t}{DP(t,T)} e^{\phi(t,T)} \mathcal{N}_2\big(d(t,Z_t^P), d(t,Z_t^A), -\rho(t,T)\big) \\
&- \frac{A_t K}{D} \mathcal{N}_2\big(e(t,Z_t^P), e(t,Z_t^A), -\rho(t,T)\big),
\end{aligned}
$$

her er

$$
\begin{aligned}
b(t,x_1) &= \alpha_P(x_1) + a_P(t,T), \\
b(t,x_2) &= \alpha_A(x_2) + \frac{\phi(t,T)}{a_A(t,T)}, \\
c(t,x_1) &= \alpha_P(x_1), \\
c(t,x_2) &= \alpha_A(x_2), \\
d(t,x_1) &= \alpha_P(x_1) + a_P(t,T) + \frac{\phi(t,T)}{a_P(t,T)}, \\
d(t,x_2) &= -\Big(\alpha_A(x_2) + a_A(t,T) - \frac{\phi(t,T)}{a_A(t,T)}\Big), \\
e(t,x_1) &= \alpha_P(x_1) + \frac{\phi(t,T)}{a_P(t,T)}, \\
e(t,x_2) &= -\big(\alpha_A(x_2) + a_A(t,T)\big),
\end{aligned}
$$

og

$$\alpha_P(x_1) = \frac{\ln \frac{x_1}{K} - \frac{1}{2}a_P^2(t,T)}{a_P(t,T)}, \tag{10.2}$$

$$\alpha_A(x_2) = \frac{\ln \frac{x_2}{K} - \frac{1}{2}a_A^2(t,T)}{a_A(t,T)}. \tag{10.3}$$

10.2 Hedgingstrategi for risikabel ECO

No har vi eit bra utgangspunkt for å finne hedgingstrategien for derivatet, vi må finne den sjølvfinansierande porteføljga $V_t = h_0(t)A_t + h_1(t)P(t,T^*) + h_2(t)P(t,T)$, som hedger Y. Denne har følgjande dynamikk

$$\mathrm{d}V_t = h_0(t)\,\mathrm{d}A_t + h_1(t)\,\mathrm{d}P(t,T^*) + h_2(t)\,\mathrm{d}P(t,T).$$

Frå teorien om endring av numeraire har vi at denne porteføljga og vil vera sjølvfinansierande i Z-marknaden, det gir

$$\mathrm{d}V_t^Z = h_0(t)\,\mathrm{d}Z_t^A + h_1(t)\,\mathrm{d}Z_t^P, \tag{10.4}$$

og vi har definert

$$G_t^Z = \frac{G_t}{P(t,T)} = \frac{\pi_Y(t,T)}{P(t,T)} \stackrel{\text{def}}{=} C(t, Z_t^P, Z_t^V).$$

Dersom vi no bruker Itò's formel på $C(t, Z_t^P, Z_t^V)$ og for å få ein meir oversiktleg notasjon bruker C for $C(t, Z_t^P, Z_t^A)$ får vi

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}C =& C_t\,\mathrm{d}t + C_{x_1}\,\mathrm{d}Z_t^P + C_{x_2}\,\mathrm{d}Z_t^A + \frac{1}{2}C_{x_1x_1}(\mathrm{d}Z_t^P)^2 + \frac{1}{2}C_{x_2x_2}(\mathrm{d}Z_t^A)^2 && (10.5)\\
&+ C_{x_1x_2}\,\mathrm{d}Z_t^P\,\mathrm{d}Z_t^A \\
=& C_{x_1}\,\mathrm{d}Z_t^P + C_{x_2}\,\mathrm{d}Z_t^A \\
&+ \left(C_t + \frac{1}{2}C_{x_1x_1}(Z_t^P)^2\sigma_P^2(t,T) + \frac{1}{2}C_{x_2x_2}(Z_t^A)^2\sigma_A^2 + C_{x_1x_2}Z_t^P Z_t^A \sigma_P\sigma_A\right)\mathrm{d}t. && (10.6)
\end{aligned}$$

No ser vi at viss $C(t, Z_t^P, Z_t^V)$ skal ha same dynamikk som V_t^Z har vi frå formel 10.4 og formel 10.6 at

$$C_t + \frac{1}{2}C_{x_1x_1}(Z_t^P)^2\sigma_P^2(t,T) + \frac{1}{2}C_{x_2x_2}(Z_t^A)^2\sigma_A^2 + C_{x_1x_2}Z_t^P Z_t^A\sigma_P\sigma_A = 0.$$

Vi får og

$$\begin{aligned}
h_0(t) &= C_{x_2}(t, Z_t^P, Z_t^A),\\
h_1(t) &= C_{x_1}(t, Z_t^P, Z_t^A),\\
h_2(t) &= C(t, Z_t^P, Z_t^A) - h_0(t)Z_t^A - h_t(t)Z_t^P.
\end{aligned}$$

No ser vi at vi har andelane i dei forskjellege papira vi skal bruke for å hedga Y, utrykt ved $C(t, Z_t^P, Z_t^V)$ og dei deriverte av denne. Vi kan no finne desse sidan vi veit at

$$\begin{aligned}
C(t, x_1, x_2) =& x_1\mathcal{N}_2\big(b(t, x_1), b(t, x_2), \rho(t, T)\big) - K\mathcal{N}_2\big(c(t, x_1), c(t, x_2), \rho(t, T)\big)\\
&+ \frac{x_1 x_2}{D} e^{\phi(t,T)}\mathcal{N}_2\big(d(t, x_1), d(t, x_2), -\rho(t, T)\big) \qquad (10.7)\\
&- \frac{x_2 K}{D}\mathcal{N}_2\big(e(t, x_1), e(t, x_2), -\rho(t, T)\big). \qquad (10.8)
\end{aligned}$$

Viss vi no deriverer formel 10.8 med omsyn på x_1 og x_2, og for enkeltheits skuld skriv $\mathcal{N}$ for $\mathcal{N}_2$, og bruker $\mathcal{N}_{z_1}$ og $\mathcal{N}_{z_2}$ for den deriverte, med omsyn på henholdsvis det første og det andre argumentet, får vi

$$\begin{aligned}
C_{x_1} =& \mathcal{N}\big(b(t, x_1), b(t, x_2), \rho(t, T)\big) + x_1\mathcal{N}_{z_1}\big(b(t, x_1), b(t, x_2), \rho(t, T)\big) b_{x_1}(t, x_1)\\
&- K\mathcal{N}_{z_1}\big(c(t, x_1), c(t, x_2), \rho(t, T)\big) c_{x_1}(t, x_1)\\
&+ \frac{x_2}{D} e^{\phi(t,T)}\mathcal{N}\big(d(t, x_1), d(t, x_2), -\rho(t, T)\big)\\
&+ \frac{x_1 x_2}{D} e^{\phi(t,T)}\mathcal{N}_{z_1}\big(d(t, x_1), d(t, x_2), -\rho(t, T)\big) d_{x_1}(t, x_1)\\
&- \frac{x_2 K}{D}\mathcal{N}_{z_1}\big(e(t, x_1), e(t, x_2), -\rho(t, T)\big) e_{x_1}(t, x_1) \qquad (10.9)
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
C_{x_2} =& x_1\mathcal{N}_{z_2}\big(b(t, x_1), b(t, x_2), \rho(t, T)\big) b_{x_2}(t, x_2)\\
&- K\mathcal{N}_{z_2}\big(c(t, x_1), c(t, x_2), \rho(t, T)\big) c_{x_2}(t, x_2)\\
&+ \frac{x_1}{D} e^{\phi(t,T)}\mathcal{N}\big(d(t, x_1), d(t, x_2), -\rho(t, T)\big)\\
&+ \frac{x_1 x_2}{D} e^{\phi(t,T)}\mathcal{N}_{z_2}\big(d(t, x_1), d(t, x_2), -\rho(t, T)\big) d_{x_2}(t, x_2)\\
&- \frac{K}{D}\mathcal{N}\big(e(t, x_1), e(t, x_2), -\rho(t, T)\big)\\
&- \frac{x_2 K}{D}\mathcal{N}_{z_2}\big(e(t, x_1), e(t, x_2), -\rho(t, T)\big) e_{x_1}(t, x_2). \qquad (10.10)
\end{aligned}$$

Vi ser at

$$b_{x_1}(t,x_1) = c_{x_1}(t,x_1) = d_{x_1}(t,x_1) = e_{x_1}(t,x_1),$$

og

$$b_{x_2}(t,x_2) = c_{x_2}(t,x_2) = -d_{x_2}(t,x_2) = -e_{x_2}(t,x_2).$$

I avsnitt A.2 på side 69 vert det vist at

$$\begin{aligned} & x_1\mathcal{N}_{z_i}\big(b(t,x_1), b(t,x_2), \rho(t,T)\big) && (10.11)\\ &\quad = K\mathcal{N}_{z_i}\big(c(t,x_1), c(t,x_2), \rho(t,T)\big), \quad i = 1,2 && (10.12)\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} & x_1 e^{\phi(t,T)}\mathcal{N}_{z_i}\big(d(t,x_1), d(t,x_2), -\rho(t,T)\big) && (10.13)\\ &\quad = K\mathcal{N}_{z_i}\big(e(t,x_1), e(t,x_2), -\rho(t,T)\big), \quad i = 1,2. && (10.14)\end{aligned}$$

No får vi frå formel 10.9 på førre side kor stor del av porteføljga som skal vera i verdien av utstedarselskapet, A,

$$\begin{aligned} h_0(t) =& C_{x_2}(t, Z_t^P, Z_t^A)\\ =& \frac{P(t,T^*)}{DP(t,T)} e^{\phi(t,T)}\mathcal{N}_2\big(d(t,x_1), d(t,x_2), -\rho(t,T)\big)\\ &- \frac{K}{D}\mathcal{N}_2\big(e(t,x_1), e(t,x_2), -\rho(t,T)\big), \end{aligned}$$

kor stor del i T^*-obligasjonar

$$\begin{aligned} h_1(t) =& C_{x_1}(t, Z_t^P, Z_t^A)\\ =& \mathcal{N}_2\big(b(t,x_1), b(t,x_2), \rho(t,T)\big)\\ &+ \frac{A_t}{P(t,T)D} e^{\phi(t,T)}\mathcal{N}_2\big(d(t,x_1), d(t,x_2), -\rho(t,T)\big), \end{aligned}$$

og resten i T-obligasjonar

$$\begin{aligned} h_2(t) &= C(t, Z_t^P, Z_t^A) - h_0(t)Z_t^A - h_t(t)Z_t^P\\ &= -K\mathcal{N}_2\big(c(t,x_1), c(t,x_2), \rho(t,T)\big)\\ &\quad - \frac{A_t P(t,T^*)}{P^2(t,T)D} e^{\phi(t,T)}\mathcal{N}_2\big(d(t,x_1), d(t,x_2), -\rho(t,T)\big). \end{aligned}$$

No vil den sjølvfinansierande porteføljga $V_t = h_0(t)A_t + h_1(t)P(t, T^*) + h_2(t)P(t, T)$ replikera det risikable kravet vårt dersom visse krav er oppfylt. Ein del av desse krava som til dømes kontinuerleg oppdatering av porteføljga vil som nemnt tidlegare i oppgåva vera vanskeleg å oppfylle, spesielt når det gjeld selskapet sin verdi, A som ikkje alltid er omsetteleg i det heile.

11
Oppsumering og konklusjon

I denne oppgåva har eg sett på korleis vi, iallfall i teorien, kan hedga ulike finansielle kontrakter ved å bruke kontrakten sitt/sine underliggjande verdipapir, og ei risikofri plassering. Eg har vist at for dei fleste vanlege derivat er det fullt mogeleg å finna ei portefølje som til einkvar tid hedgar derivatet, forutsatt at vi kan oppdatera denne kontinuerleg. Vi kan og ved å bruka ulike paritetar utvida desse resultata, frå dei vanlege kjøps- og salsopsjonane eg har brukt som døme, til meir kompliserte kontrakter.

Eg har vist ved simulering kva som vert resultatet, når vi prøver å nærme oss verkelegheita ved å oppdatere porteføljga i diskret tid. Dette gav som forventa at hedgen ikkje verkar like optimalt i dette tilfellet som ved kontinuerleg oppdatering.

I den siste delen av oppgåva har eg, ved å bruke same tilnærmingsmåte, forsøkt å hedge derivat som er utsatt for kreditrisiko hos utstedar. Dette gir ein meir komplisert utrekning, men eg finn at vi òg kan hedge desse derivata, forutsatt at verdien av utstedarselskapet er omsetteleg.

Ein naturleg veg å gå vidare vil vera å forsøkje å finne porteføljen som hedgar ein opsjon med motpartrisiko dersom utstedar si gjeld og er stokastisk. Det ville òg vore interessant og sett på ein opsjon der det underliggjande papiret er utsett for kredittrisiko.

Del IV

Appendix

A Bevis

A.1 Normalfordeling

Skal visa at uttrykka er like

$$K\mathcal{N}'(d - b(t,S,T)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{\ln K - \frac{1}{2}(d - b(t,S,T))^2\}$$

set inn for $\ln K$ frå formel 4.9 på side 29 og får

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-db(t,S,T) + \frac{1}{2}b^2(t,S,T) + \ln\frac{P(t,T)}{P(t,S)} - \frac{1}{2}(d - b(t,S,T))^2\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\ln\frac{P(t,T)}{P(t,S)} - \frac{1}{2}d^2\} \\
&= \frac{P(t,T)}{P(t,S)}\mathcal{N}'(d)
\end{aligned}$$

A.2 Multinormalfordeling

Skal bevise formel 10.12 på side 65, set for å få ein lettare notasjon $\rho(t,T) = \rho$, $b(t,x_1) = b_1$, $b(t,x_2) = b_2$ og tilsvarande for $c(t,x_i), i = 1{,}2$

$$x_1\mathcal{N}_{z_i}(b_1, b_2, \rho) = K\mathcal{N}_{z_i}(c_1, c_2, \rho), \quad i = 1{,}2.$$

For å vise dette tar eg utgangspunkt i den andrederiverte til funksjonane, Vi har

$$K\mathcal{N}_{z_1 z_2}\big(c(t,x_1), c(t,x_2), \rho(t,T)\big) = K\mathcal{N}_{z_2 z_1}\big(c_1, c_2, \rho\big)$$

og

$$x_1\mathcal{N}_{z_1 z_2}\big(b(t,x_1), b(t,x_2), \rho(t,T)\big) = x_1\mathcal{N}_{z_2 z_1}\big(b_1, b_2, \rho\big).$$

Slik at det er tilstrekkeleg å visa

$$K\mathcal{N}_{z_1 z_2}\big(c_1, c_2, \rho\big) = x_1\mathcal{N}_{z_1 z_2}\big(b_1, b_2, \rho\big).$$

Har frå Casella og Berger (2002)

$$K\mathcal{N}_{z_1 z_2}\big(c_1, c_2, \rho\big) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\big(\alpha_P^2 - 2\rho\alpha_P\alpha_A + \alpha_A^2\big) + \ln K\}.$$

Viss vi no set inn for $\ln K$ frå formel 10.2 på side 63 får vi at dette vert

$$\begin{aligned}
&\frac{P(t,T^*)}{P(t,T)}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\big(\alpha_P^2 - 2\rho(\alpha_P\alpha_V) + \alpha_A^2\big) \\
&- \alpha_P a_P(t,T) - \frac{1}{2}a_P^2(t,T)\} \\
=&\frac{x_1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\{(\alpha_P + a_P(t,T))^2 \\
&- 2\rho(\alpha_P + a_P(t,T))\Big(\alpha_A + \frac{\phi(t,T)}{a_A(t,T)}\Big) + \Big(\alpha_A + \frac{\phi(t,T)}{a_A(t,T)}\Big)^2\} \\
=&x_1\mathcal{N}_{z_1 z_2}\big(b_1, b_2, \rho\big).
\end{aligned}$$

No har vi vist at dei deriverte er like, viss vi i tillegg kan vise at funksjonane er like i eit punkt er det ok, dersom vi set $t = T$ vert $x_1 = P(T, T^*)$, $b(t, x_1)$ vil gå mot $c(t, x_1)$, $b(t, x_2)$ vil gå mot $c(t, x_2)$ og K går mot x_1, det vil seie at funksjonane er like.

B
R programmkode

B.1 Exhange opsjon

B.1.1 Program som simulerer hedginga

```
diff2=NULL
diff3=NULL
for(j in 1:100){
n=3500

q=1.25
d=0.06
r0=0.06

v=0.15
T=2
T1=5
T2=10
t0=0

dt=(T-t0)/n


dW=rnorm(n,0,sqrt(dt))
```

```
dW1=rnorm(n,0,sqrt(dt))
dW2=rnorm(n,0,sqrt(dt))

a2=NULL
a3=NULL
r=NULL
r[1]=r0
B=NULL
B[1]=0.6
P1=NULL
P1[1]=0.6
P2=NULL
P2[1]=0.4
K1=4
K2=1
g=NULL
PI=NULL
b2=NULL
eta=NULL
phi=NULL
eta2=NULL
phi2=NULL
eta3=NULL
phi3=NULL
V=NULL
V1=NULL
V2=NULL
V3=NULL
u1=NULL
u2=NULL
w1=NULL
w2=NULL
for(i in 1:(n-1))
  {
   r[i+1]=r[i]+q*(d-r[i]) * dt +v*dW[i]
   P1[i+1]=P1[i]+r[i]*P1[i]*dt+v/q*(1-exp(-q*(n-i+(3*1750))/
       1750))*P1[i]*dW1[i]
   P2[i+1]=P2[i]+r[i]*P2[i]*dt+v/q*(1-exp(-q*(n-i+(8*1750))/
       1750))*P2[i]*dW2[i]
   b2[i+1]=((v^2)/(2*q^3))*((exp(-q*T2)-exp(-q*T1))^2)*(exp(2*q
       *T1)-exp(2*q*(i/1750)))
   g[i+1]=(log(K1*P1[i+1]/K2*P2[i+1])+0.5*b2[i+1])/sqrt(b2[i
       +1])
   PI[i+1]=P1[i+1]*pnorm(g[i+1])-K2*P2[i+1]*pnorm(g[i+1]-sqrt(
       b2[i+1]))
```

```
    eta[i+1]= -K2*pnorm(g[i+1]-sqrt(b2[i+1]))
    phi[i+1]=pnorm(g[i+1])
    V[i+1]=eta[i+1]*P2[i+1]+phi[i+1]*P1[i+1]
    eta2[1]= -K2*pnorm(g[2]-sqrt(b2[2]))
    phi2[1]=pnorm(g[2])
    eta3[1]= -K2*pnorm(g[2]-sqrt(b2[2]))
    phi3[1]=pnorm(g[2])

    V2[1]=eta2[1]*P2[2]+phi2[1]*P1[2]
    if((i-1)%%7 == 0){
      eta2[i+1]=eta[i+1]
      phi2[i+1]=phi[i+1]
      V1[i+1]=eta2[i+1]*P2[i+1]+phi2[i+1]*P1[i+1]
      a2[(i-1)/7]=V1[i+1]-V1[i]
    }
    else {
      eta2[i+1]=eta2[i]
      phi2[i+1]=phi2[i]
  }
if((i-1)%%35 == 0){
      eta3[i+1]=eta[i+1]
      phi3[i+1]=phi[i+1]
      V3[i+1]=eta3[i+1]*P2[i+1]+phi3[i+1]*P1[i+1]
      a3[(i-1)/35]=V3[i+1]-V3[i]
    }
    else {
      eta3[i+1]=eta3[i]
      phi3[i+1]=phi3[i]
  }

    V1[i+1]=eta2[i+1]*P2[i+1]+phi2[i+1]*P1[i+1]
    V3[i+1]=eta3[i+1]*P2[i+1]+phi3[i+1]*P1[i+1]
    u1[i+1]=(eta2[i+1]*P2[i+1])/V1[i+1]
    u2[i+1]=(phi2[i+1]*P1[i+1])/V1[i+1]
    w1[i+1]=u1[i+1]*(eta2[i]*P2[i+1]+phi2[i]*P1[i+1])
    w2[i+1]=u2[i+1]*(eta2[i]*P2[i+1]+phi2[i]*P1[i+1])
    V2[i+1]=w1[i+1]*P2[i+1]+w2[i+1]*P1[i+1]
  }
diff2[j]=sum(a2)
diff3[j]=sum(a3)
}
library(Hmisc)
setps("modell",w=5, h=5)
par(mfrow=c(2,2))
```

```
plot(seq(0,2,length=length(r)),r,type="l",main=expression(paste
    ('Hull-White␣prosess.' )),xlab='Tid␣i␣år',ylab="Rente␣",las
    =1,col='blue')
plot(seq(0,2,length=length(P1)),P1,type="l",main=expression(
    paste('5␣års␣obligasjon.')),xlab='Tid␣i␣år',ylab="Verdi",
    las=1,col='purple')
 plot(seq(0,2,length=length(P2)),P2,type="l",main=expression(
     paste('10␣års␣obligasjon.')),xlab='Tid␣i␣år',ylab="Verdi",
     las=1,col='black')
dev.off()
setps("utvikling",w=5,h=5)
par(mfrow=c(2,2))
 plot(seq(0,2,length=length(PI)),PI,type="l",main=expression(
     paste('Verdien␣på␣opsjonen')),xlab='Tid␣i␣år',ylab="Verdi",
     las=1,col='red')
plot(seq(0,2,length=length(eta)),eta,type="l",main=expression(
    paste('Ant.␣10␣års␣obligasjonar.')),xlab='Tid␣i␣år',ylab="
    Verdi",las=1,col='orange')
plot(seq(0,2,length=length(phi)),phi,type="l",main=expression(
    paste('Ant.␣5␣års␣obligasjonar.')),xlab='Tid␣i␣år',ylab="
    Verdi",las=1,col='green')
dev.off()
setps("pris",w=5,h=6)
par(mfrow=c(3,1))
plot(seq(0,2,length=length(V)),V,type="l",main=expression(paste
    ('Kontinuerlig␣oppdatert␣portefølgje.')),xlab='Tid␣i␣år',
    ylab="Verdi",las=1)

plot(seq(0,2,length=length(V1)),V1,type="l",main=expression(
    paste('Portefølge␣oppdatert␣dagleg.')),xlab='Tid␣i␣år',ylab
    ="Verdi",las=1)
plot(seq(0,2,length=length(V1)),V3,type="l",main=expression(
    paste('Portefølge␣oppdatert␣ukentlig.')),xlab='Tid␣i␣år',
    ylab="Verdi",las=1)
dev.off()
mean(diff2) #forventinga til underskotet ved dagleg oppdatering

var(diff2)  #variansen til underskotet ved dagleg oppdatering

mean(diff3) #forventinga til underskotet ved ukentleg
    oppdatering

var(diff3)  #variansen til underskotet ved ukentleg oppdatering

t.test(diff2,conf.level=0.99)
```

```
t.test(diff3,conf.level=0.99)
t.test(diff2,diff3,conf.level=0.99)
```

B.1.2 T-tester

Tester om det er forskjell mellom ukentlig- og dagleg oppdatering.

```
 Welch Two Sample t-test

data: diff2 and diff3
t = 0.2158, df = 196.402, p-value = 0.8294
alternative hypothesis: true difference in means is not equal
   to 0
99 percent confidence interval:
 -0.03485230 0.04115907
sample estimates:
 mean of x mean of y
0.07553163 0.07237825
```

Tester om kapitalbehovet ved dagleg oppdatering er positivt

```
 One Sample t-test

data: diff2
t = 7.0016, df = 99, p-value = 3.071e-10
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
99 percent confidence interval:
 0.04719875 0.10386451
sample estimates:
 mean of x
0.07553163
```

Tester om kapitalbehovet ved ukentleg oppdatering er positivt

```
 One Sample t-test

data: diff3
t = 7.3444, df = 99, p-value = 5.915e-11
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
```

```
99 percent confidence interval:
 0.04649524 0.09826125
sample estimates:
 mean of x
0.07237825
```

B.2 The Greeks

```
#Lite program som tegner graf over grekarane

P1=0.9   #verdien på T-obl.
K=100    #strikeprisen
a=0.1    #volatilitet
P=c(0:200)
sigma=0.4 #volatilitet
T=2.3     #utløp
t=2      #tid
r=0.05      #renta

library(Hmisc)
setps("Delt",w=5,h=5)
par(mfrow=c(3,2))
#Tegner Delta
plot(P,pnorm((log(P/K*P1)+0.5*a^2)/a),type="l",xlab='P(t,T)',
   ylab='Delta')
#tegner Gamma
plot(P,dnorm((log(P/K*P1)+0.5*a^2)/a)/(P*sigma*sqrt(T-t)),type=
   "l",xlab='P(t,T)',ylab='Gamma')
#Tegner tetha
plot(P,-((P*dnorm((log(P/K*P1)+0.5*a^2)/a)*sigma)/(2*sqrt(T-t))
   )-r*K*exp(-r*(T-t))*pnorm((log(P/K*P1)+0.5*a^2)/a-a),type="l
   ",xlab='P(t,T)',ylab='Theta')
#Tegner rho
plot(P,K*(T-t)*exp(-r*(T-t))*pnorm((log(P/K*P1)+0.5*a^2)/a-a),
   type="l",xlab='P(t,T)',ylab='Rho')
#Tegner Vega
plot(P,P*dnorm((log(P/K*P1)+0.5*a^2)/a)*sqrt(T-t),type="l",xlab
   ='P(t,T)',ylab='Vega')
dev.off()
```

Litteratur

Ammann M. (2002). *Credit risk valuation*. Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, andre utgåve. ISBN 3-540-67805-0. Methods, models, and applications. Referert til på side 5 og 56.

Björk T. (2004). *Arbitrage theory in continuous time*, volum 2. Oxford University Press. ISBN 0-19-927126-7. Referert til på side 5, 6, 11, 12, 17, 18, 19, 48 og 50.

Brown A. (2006). *The Poker Face of Wall Street*. Wiley. ISBN 0-471-77057-4. Referert til på side 47.

Casella G. og Berger R.L. (2002). *Statistical inference*. The Wadsworth & Brooks/Cole Statistics/Probability Series. Duxbury, Pacific Grove, CA. ISBN 0-534-11958-1. Referert til på side 70.

Duffie D. og Singleton K.J. (2003). *Credit Risk, Pricing, Measurment and Managment*. Princeton University Press. ISBN 0-69109-046-7. Referert til på side 59.

Heath D., Jarrow R. og Morton A. (1992). «Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation». *Econometria*, **volum 60**, nummer 1, side 77–105. ISSN 0012-9682. Referert til på side 16.

Hull J.C. (2006). *Options, Futures and other derivatives*, volum 2. Prentice Hall. ISBN 0-13-149908-4. Referert til på side 18.

Jarrow R.A. (2002). *Modeling Fixed-income Securities and interest rate options*. Stanford University Press, andre utgåve. ISBN 0-8047-4438-6. Referert til på side 18.

Karatzas I. og Shreve S.E. (1988). *Brownian motion and stochastic calculus*, volum 113 av *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York. ISBN 0-387-96535-1. Referert til på side 10.

Merton R. (1974). «On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates». *Journal of Finance*, **volum 29**, nummer 2, side 449–479. Referert til på side 4.

Musiela M. og Rutkowski M. (2005). *Martingale methods in financial modelling*, volum 36 av *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, Berlin, andre utgåve. ISBN 3-540-20966-2. Referert til på side 15 og 43.

Norberg R. (2006). «Dynamic greeks». *Insurance: Mathematics & Economics*. Referert til på side 48.

Paulsen J. (2005). «Renteteori; notater til kurset finm34600». Referert til på side 62.

R Development Core Team (2006). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL `http://www.R-project.org`. ISBN 3-900051-07-0. Referert til på side ii.

Shreve S.E. (2004). *Stochastic calculus for finance. II*. Springer Finance. Springer-Verlag, New York. ISBN 0-387-40101-6. Continuous-time models. Referert til på side 5.

Taleb N.N. (2004). *Fooled by Randomness: The Hidden Role of Chance in Life and in the Markets*. Thomson, TEXERE. ISBN 1-58799-190-X. Referert til på side 37.